PROBLEMAS Y SOLUCIONES

Campeonato de Matemática

Universidad de La Frontera

Problemas y Soluciones
Campeonato de Matemática

ISBN:
Registro de Propiedad Intelectual:

Universidad de La Frontera
Av. Francisco Salazar 01145, Casilla 54-D, Temuco

Rector: Sergio Bravo Escobar
Vicerrector Académico: Dr. Rubén Leal Riquelme
Director de Bibliotecas y Recursos de Información: Roberto Araya Navarro **Coordinador Ediciones:** Luis Abarzúa Guzmán

Diseño y diagramación: Camila Correa Harnecker
Escritura en LateX e ilustraciones: José Labrín Parra

Impreso en Andros Impresores

PROBLEMAS Y SOLUCIONES

Campeonato de Matemática
Universidad de La Frontera

Hernán Burgos Vega
Director Académico
Campeonato de Matemática

Ediciones Universidad de La Frontera

ÍNDICE GENERAL

PRESENTACIÓN

EN GENERAL, LOS MATEMÁTICOS tendemos a utilizar un lenguaje, que si bien es correcto, preciso y riguroso, muchas veces tiene la inusual habilidad de ahuyentar a quienes no necesariamente sienten una atracción espontánea por la matemática. Uno de los ejemplos más patentes de este uso riguroso del lenguaje es que le llamamos "problemas" a los desafíos que nos presenta la matemática. Y es correcto, riguroso y preciso llamarles así, pues son problemas, que requieren una solución. Sin embargo, la palabra tiene una carga emocional y cultural tremenda, pues en general, cualquiera en su sano juicio intenta alejarse de los problemas. Los problemas que presenta este entretenido libro deben ser entendidos como desafíos interesantes e intrigantes, que le permiten al lector regalarse un momento de creatividad intelectual, cualquiera que sea la razón por la cual abrió el libro.

Si bien el Dr. Hernán Burgos nos tranquiliza desde el título mismo del libro, pues nos anuncia que se trata de una colección de problemas con soluciones, invito al lector a no dejarse tentar muy rápido con la presencia de las ingeniosas soluciones que forman la segunda parte del libro. Los desafíos del texto son suficientemente ricos y entretenidos como para que la construcción de nuestra propia solución se nos presente como el objetivo a alcanzar, ya sea pensando en secreto de vuelta a casa luego del trabajo, en una conversación con amigos, luego de un almuerzo familiar, en una sala de clases entre compañeros o en la sala de profesores en torno a un café.

Los cientos de problemas que componen el libro versan de los más variados temas del pensamiento matemático, desde acertijos numéricos, pasando por desafíos lógicos hasta complejas combinaciones geométricas que nos aseguran una alta dosis de buena inversión de tiempo. Personalmente, me encontré con problemas sencillos que iluminan conceptos básicos pero centrales, como el problema que nos introduce en el apasionante tema de las curvas cerradas y su interior al desafiarnos con un conteo de ranas. Este problema, así como muchos otros, nos invitan a reflexionar sobre los fenómenos más generales que hay detrás de su enunciado. Imagino una sala de clases con varias docenas de niñas y niños discutiendo métodos generales para contar el número de ranas en una isla mucho más complicada que la del problema en cuestión.

Ya el lector podrá imaginar que este prólogo podría alargarse por varias páginas si me entrego a la tentación de comentar las cientos de emociones que me produjeron los desafíos del libro. En honor a la oportunidad que el lector tiene en sus manos, no extenderé este prólogo más allá de un comentario final que tiene que ver con un concepto muy en boga en estos tiempos, del profesor Francis Su, presidente de la Mathematical Association of America. Se refiere a la respuesta a una de las preguntas más complicadas que enfrentamos quienes nos dedicamos a fomentar el pensamiento matemático en la sociedad. El profesor Su asegura que hacer, pensar y dedicar tiempo a la matemática sirve para promover el florecimiento humano. Sin lugar a dudas, este libro será de gran ayuda para miles de jóvenes, profesores y otros apasionados por promover su propio florecimiento intelectual.

Dr. Mario Ponce
Decano Facultad de Matemática
Pontificia Universidad Católica de Chile

INTRODUCCIÓN

EL CAMPEONATO DE MATEMÁTICA de la Universidad de La Frontera es una actividad de vinculación temprana y de colaboración con los colegios de la región sur del país, que entusiasma y convoca cada año del orden de 5.000 estudiantes de unos 50 colegios.

Cada año en este campeonato usamos entre 100 y 130 problemas, todos originales y lúdicos, pensados por un selecto grupo de matemáticos de todo el mundo, reunidos en la organización "Canguro, Matemáticos sin Frontera".

Este libro contiene el material de los últimos cuatro campeonatos: 2013, 2014, 2015, 2016, con todos los problemas y sus soluciones, material que ponemos a disposición de los colegas con la íntima esperanza de que les sirvan de soporte en sus clases de matemática, y ayuden en la formación de estudiantes críticos, curiosos y que no tengan temor en enfrentar problemas nuevos y no triviales, en definitiva, problemas que les hagan pensar.

Estamos convencidos de que estudiantes entusiasmados y motivados tendrán mayor éxito, como también, pensamos que problemas que desafían el intelecto del estudiante lo ayudarán a organizar, contar, razonar y finalmente encontrar secuencias y algoritmos que le permitan entender los problemas. Así, al terminar el proceso, sentirán el placer de haber resuelto un problema novedoso y desafiante.

Finalmente agradecemos a las autoridades de la Universidad de La Frontera el decidido y constante respaldo al campeonato de matemática.

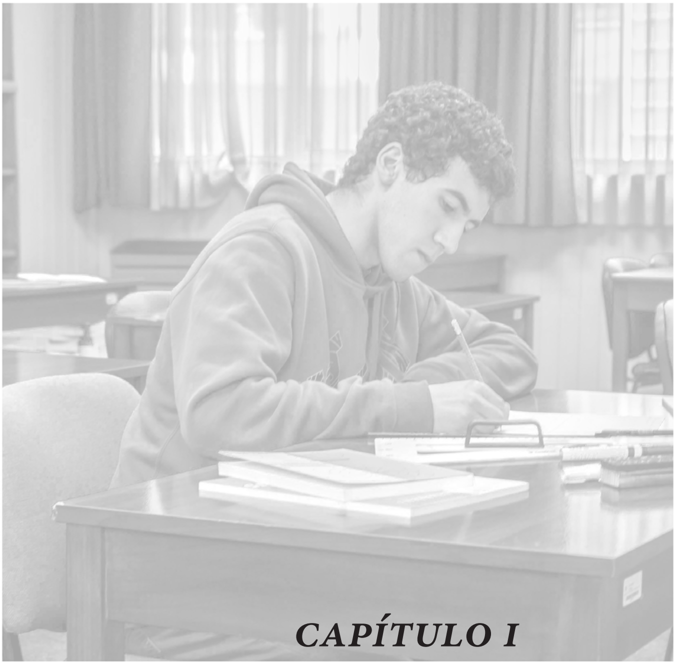
Esperamos que este material sea un aporte a los colegas en su práctica diaria.

Dr. Hernán Burgos V.
Director Académico
Centro Apoyo Matemático y Vinculación Temprana CAMVIT
Universidad de La Frontera
Temuco, Verano del 2017

“La resolución de problemas
es el corazón de la Matemática”

Soluciones de los Problemas a cargo
del *Comité Académico del Campeonato,*
conformado por:

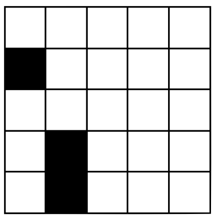
Hernán Burgos Vega
José Labrín Parra
Eduardo Milman Aguilar
Joan Molina Sandoval



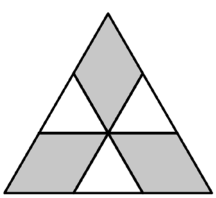
CAPÍTULO I

PROBLEMAS

Problema 1. Camilo y una amiga están jugando al "Combate Naval" en un tablero de 5×5. Camilo ya ha ubicado 2 barcos, como se muestra en la figura. Todavía tiene que colocar un barco de 3×1 para que cubra exactamente tres celdas. Sabiendo que dos barcos no pueden tener un punto en común. ¿Cuántas posiciones hay para su barco de 3×1?



Problema 2. En la imagen, el triángulo grande es equilátero y tiene área 9 cm². Las rectas son paralelas a los lados y dividen cada lado en 3 partes iguales. ¿Cuál es el área de la parte sombreada?



Problema 3. Roberto quiere decirle a Karina un número, en el cual el producto de sus dígitos es igual a 24. ¿Cuál es la suma de los dígitos del número más pequeño que Roberto puede decirle a Karina?

Problema 4. Laura, Iván, Valeria y Cata quieren estar juntos en una foto. Cata y Laura son las mejores amigas y quieren estar juntas. Iván quiere estar junto a Laura porque le gusta. ¿De cuántas formas pueden acomodarse para la foto?

Problema 5. En el colegio de animales hay 3 gatos, 4 patos, 2 gansos y varios corderos tomando clases. El profesor búho contó las patas de todos sus alumnos en su clase y obtuvo 44 patas. ¿Cuántos corderos hay en la clase?

Problema 6. Un globo lleno de Helio puede alzar una canasta que contiene cosas que pesan a lo más 80 kilos. Dos globos llenos de Helio pueden alzar la misma canasta que contiene cosas que pesan a lo más 180 kilos. ¿Cuánto pesa la canasta?

Problema 7. Los nietos, nietas, bisnietos y bisnietas del abuelo Anacleto juegan a la ronda, en total 40 niños y 28 niñas forman un círculo, tomados de la mano. Exactamente 18 niños dan su mano izquierda para una de las niñas. ¿Cuántos niños dan su mano derecha a una chica?

Problema 8. Escribe todas las secuencias de números enteros consecutivos que contengan al número 7, de forma tal que la razón entre números impares y números pares sea $\frac{2}{3}$

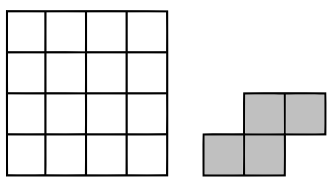
Problema 9. Miguel pensó en un número positivo, lo multiplicó por sí mismo, le sumó 1, multiplicó el resultado por 10, le sumó 3, luego multiplicó el resultado por 4 y después le sumó 1. Su último resultado fue 2013. ¿En qué número pensó Miguel?

Problema 10. Las masas de sal y agua en el mar de Pitágoras están en la razón 7 : 193. ¿Cuántos kilogramos de sal hay en 1000 kilogramos de agua de mar?

Problema 11. Un saco contiene bolitas de cinco colores diferentes. Dos son rojas, tres son azules, diez son blancas, cuatro son verdes y tres son negras. ¿Cuál es el número más pequeño de bolitas que se debería sacar del saco para asegurarse de sacar al menos dos bolitas del mismo color?

Problema 12. Sabiendo que $\dfrac{1111}{101} = 11$, encontrar el valor de $\dfrac{3333}{101} + \dfrac{6666}{303}$

Problema 13. Anita tiene una hoja cuadrada cuadriculada como la que se muestra en la figura. A partir de dicha hoja ella recorta figuras por las líneas del cuadriculado como la que se muestra en la imagen de la derecha. Después de realizar los recortes, ¿cuál es la mínima cantidad posible de cuadraditos restantes?



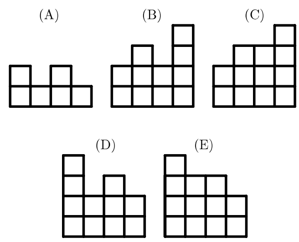
Problema 14. La Sra. Margarita compró cuatro choclos para cada miembro de su familia de cuatro personas. En la tienda recibió el descuento que le ofrecía la tienda. Oferta de choclos: 1 choclo 200 pesos. Cada 5 choclos el sexto es gratis ¿Cuánto tanto pagó?

Problema 15. Alex enciende una vela cada diez minutos. Cada vela encendida tiene una duración de cuarenta minutos. ¿Cuántas velas están encendidas después de cincuenta y cinco minutos a partir del momento en que Alex enciende la primera vela?

Problema 16. El número promedio de hijos en cinco familias no puede ser:

a. 0,2 **d.** 2,4
b. 1,2 **e.** 2,5
c. 2,2

Problema 17. Juan ha construido un edificio de cubos sobre una rejilla de 4×4. La imagen muestra el número de cubos que está sobre cada celda de la rejilla. Cuando Juan la mira desde atrás, ¿cuál de estas imágenes ve?



Vista Trasera

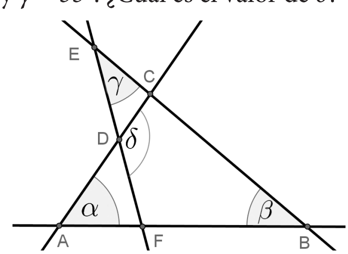
4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
3	3	1	2

Vista Frontal

Problema 18. Marcos y Luisa están parados en lados opuestos de una fuente circular. Empiezan a correr en el sentido de las agujas del reloj alrededor de la fuente. La rapidez de Marcos es 9/8 la rapidez de Luisa. ¿Cuántas vueltas ha dado Luisa antes de que Marcos la alcance por primera vez?

Problema 19. Los enteros positivos x, y, z satisfacen que $x \cdot y = 14$, $y \cdot z = 10$ y que $z \cdot x = 35$ ¿Cuál es el valor de $x + y + z$?

Problema 20. En el diagrama, $\alpha = 55°$, $\beta = 40°$, y $\gamma = 35°$. ¿Cuál es el valor de δ?

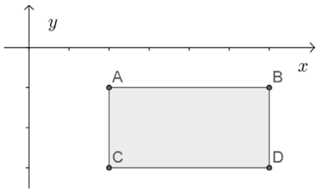


Problema 21. Vanessa escribió varios números enteros consecutivos. ¿Cuál de los siguientes no puede ser el porcentaje de números impares que hay en la lista de Vanessa?

a. 40% **d.** 50%
b. 45% **e.** 60%
c. 48%

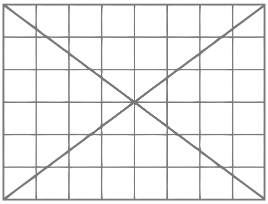
Problema 22. Los lados del rectángulo *CDBA* son paralelos a los ejes coordenados. *CDBA* está debajo del eje *X* y a la derecha del eje *Y*, como se muestra en la figura. Las coordenadas de los cuatro puntos *A, B, C* y *D* son todas números enteros. Para cada uno de estos puntos calcula mos el valor $\frac{\textit{coordenada } y}{\textit{coordenada } x}$

¿Cuál de los cuatro puntos da el menor valor?



Problema 23. Todos los enteros positivos de cuatro cifras que tienen los mismos dígitos que el número 2013 están escritos en la pizarra en orden creciente. ¿Cuál es la diferencia numérica más grande que hay entre dos números vecinos en la pizarra?

Problema 24. En la rejilla de 6×8 que se muestra, 24 de las celdas no son interceptadas por una de las diagonales. Cuando se dibujan las diagonales de una rejilla de 6×10, ¿Cuántas celdas no son interceptadas por las diagonales?

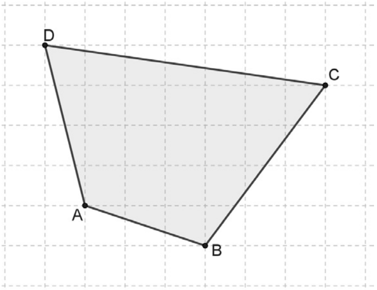


Problema 25. Sea *S* el número de cuadrados entre los enteros 1 y 2013^6. Sea *Q* el número de cubos entre los mismos números. ¿Cuál de las siguientes alternativas es verdadera?:

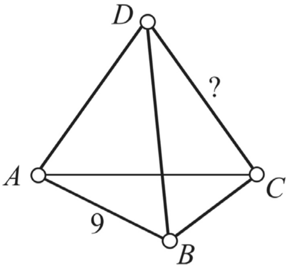
a. S = Q
b. *2S = 3Q*
c. *3S = 2Q*
d. *S = 2013Q*
e. *SSS = QQ*

Problema 26. Andrés, Beatriz, Kathy, Daniela y Eduardo nacieron el 20/02/2001, 12/03/2000, 20/03/2001, 12/04/2000 y 23/04/2001 (día, mes, año). Andrés y Eduardo nacieron el mismo mes. Además, Beatriz y Kathy nacieron el mismo mes. Andrés y Kathy nacieron el mismo día de meses diferentes. Además Daniela y Eduardo nacieron el mismo día pero en meses distintos ¿Cuál de los niños es el más joven?

Problema 27. La figura muestra un cuadrilátero sombreado *ABCD* dibujado sobre un geoplano. Cada celda del geoplano tiene un lado de 2cm. ¿Cuál es el área del cuadrilátero *ABCD*?



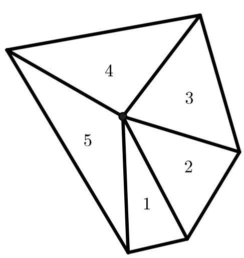
Problema 28. Cada uno de los cuatro vértices y seis aristas de un tetraedro está marcado con uno de los diez números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11 (se omite el 10). Cada número se usa una única vez. Por cada dos vértices del tetraedro, la suma de estos números en los vértices es el número de la arista que los conecta. La arista *AB* está marcada con un 9, ¿Qué número se usa para marcar la arista *CD*?



Problema 29. Cinco enteros positivos consecutivos tienen la siguiente propiedad: tres de ellos suman lo mismo que la suma de los otros dos. ¿Cuántos grupos de números enteros cumplen con esta propiedad?

Problema 30. ¿Cuántos decimales tiene el número $\frac{1}{1024000}$ escrito en su forma decimal?

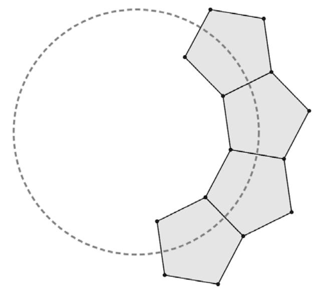
Problema 31. La imagen muestra cinco triángulos isósceles con ángulos superiores de 24°, 48°, 72°, 96° y 120°, todos múltiplos del ángulo superior más pequeño, y todos los ángulos tienen un valor entero. Si queremos aumentar la cantidad de triángulos isósceles tanto como sea posible. ¿Cuántos grados tiene el ángulo superior más pequeño para ese caso?



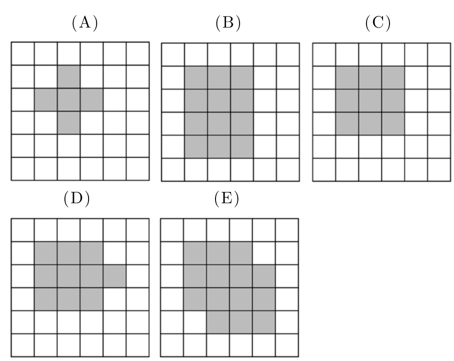
Problema 32. Romina hornea 6 pasteles de frambuesa uno después del otro, numerándolos del uno al seis en orden. Mientras hace esto, sus hijos a veces entran a la cocina y comen el pastel más caliente. ¿Cuál de las siguientes combinaciones no puede ser el orden en que los niños comen los pasteles?

a. *1, 2, 3, 4, 5, 6*
b. *1, 2, 5, 4, 3, 6*
c. *3, 2, 5, 4, 6, 1*
d. *4, 5, 6, 2, 3, 1*
e. *6, 5, 4, 3, 2, 1*

Problema 33. Ricardo tiene piezas plásticas idénticas con la forma de un pentágono regular. Las pega juntas lado a lado para completar un círculo, como se ve en la figura. ¿Cuántas piezas tiene este círculo?



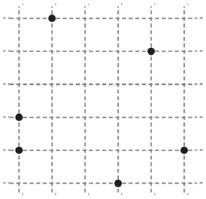
Problema 34. Una alfombra circular se pone sobre un piso con baldosas cuadradas. Todas las baldosas que tienen más de un punto en común con la alfombra se pintan gris. ¿Cuál de las siguientes imágenes representa un resultado no posible?



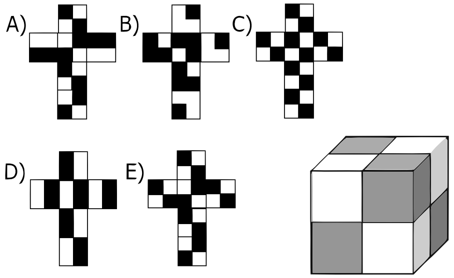
Problema 35. El número 200013 - 2013 no es divisible por:

a. 2
b. 3
c. 5
d. 7
e. 11

Problema 36. Seis puntos están marcados en un geoplano con celdas de lado 1. ¿Cuál es el área más pequeña de un triángulo con vértices en los lugares marcados?



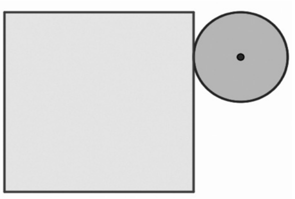
Problema 37. Las caras de un cubo están pintadas con cuadrados blancos y negros como si estuviese hecho con cuatro cubos blancos y negros más pequeños. ¿Cuál de los siguientes esquemas sería el correcto para construirlo a partir de una hoja de papel?



Problema 38. Una pelota de caucho cae verticalmente desde una altura de 15 metros del techo de un edificio. Después de cada impacto con el piso rebota hasta una altura de ⅘ de la altura anterior. ¿Cuántas veces aparecerá la pelota enfrente de una ventana regular cuyo borde inferior tiene una altura de 5,5 metros y cuyo borde superior tiene una de 6,5 metros?

Problema 39. El baile del tango se baila en parejas, cada una de un hombre y una mujer. Una noche en un baile no hay más de 50 personas presentes. En algún momento ¾ de los hombres está bailando con ⅘ de las mujeres. ¿Cuántas personas están bailando en ese momento?

Problema 40. Dado el cuadrado de lado 4 de la figura, se tiene que sobre él se desliza una rueda de radio 1 sobre sus lados. Calcular la longitud del camino que recorre el centro de la rueda.



Problema 41. En la reunión anual de caracoles, el caracol Jacinto propone el siguiente desafío a sus amigos ¿Cuántos números de 4 dígitos en que el dígito de la decena y la centena son iguales poseen la propiedad siguiente: después de restar 2997 de dicho número, se obtiene un número de 4 dígitos que consiste en los mismos dígitos en orden inverso? Resuelve tú el problema antes de que lo resuelvan los amigos caracoles.

Problema 42. Al sumarle 4^{15} a 8^{10}, Mónica ha obtenido un nímero que también es potencia de 2. Encuentra este número.

Problema 43. El abuelo Anacleto, matemático jubilado y aventurero, ha construido una ventana con forma de trapecio cuyo perímetro es de 5 metros y la longitud de sus lados (medidos en metros) son números enteros. ¿Cuál es la medida de los dos ángulos más pequeños de la ventana que construyó el abuelo?

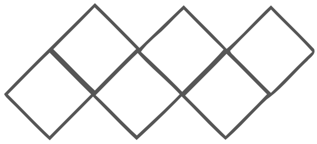
Problema 44. El abuelo Anacleto matemático jubilado y aventurero, sabe construir ventanas con forma de trapecio isósceles, él quiere construir algunas ventanas de perímetro 11 metros, tal que la longitud de sus lados (medidos en metros) sean números enteros. Encuentre todas las posibles ventanas con forma de trapecio que cumplen con estas condiciones.

Problema 45. El número de la casa de Ariel tiene tres dígitos. Si se remueve el primer dígito (el de la centena) de este número se obtiene el número de la casa de Benjamín. Si se remueve el primer dígito (el de la decena) del número de la casa de Benjamín, se obtiene el número de la casa de Clara. Si se suman los números de las casas de Ariel, Benjamín y Clara se obtiene 912. ¿Cuál es el segundo dígito del número de la casa de Ariel?

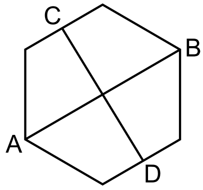
Problema 46. El número de la casa de Ariel tiene cuatro dígitos. Si se remueve el primer dígito de este número se obtiene el número de la casa de Benjamín. Si se remueve el primer dígito del número de la casa de Benjamín, se obtiene el número de la casa de Clara. Si se suman los números de las casas de Ariel, Benjamín y Clara se obtiene 5992. ¿Cuál es el número de la casa de Ariel si la suma de los dígitos de dicho número es 19?

Problema 47. Encuentre el último dígito (la cifra de las unidades) del número 4^{2013}- 3^{2013}

Problema 48. La siguiente figura muestra 6 cuadrados en zigzag de lados 1cm × 1cm. Su perímetro es 14cm, ¿Cuál es el perímetro de un zigzag hecho de la misma manera pero con 2013 cuadrados?



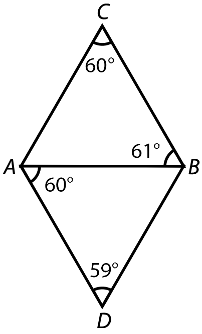
Problema 49. El segmento AB une dos vértices opuestos de un hexágono regular. El segmento CD une dos puntos medios de lados opuestos. Encuentra el producto entre los segmentos AB y CD si el área del hexágono es $60u^2$.



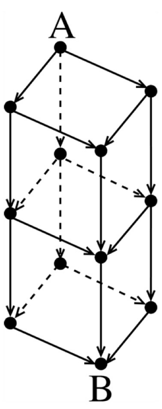
Problema 50. Un grupo de estudiantes tuvo una prueba. Si cada niño hubiese tenido 3 puntos más en su prueba, entonces el promedio del curso hubiese sido 1,2 puntos más alto de lo que fue. ¿Cuál es el porcentaje de niñas en el curso?

Problema 51. Hoy, Juan y su hijo están celebrando su cumpleaños. Juan multiplicó correctamente su edad con la de su hijo y obtuvo 2013 como resultado. ¿Qué edad tiene Juan?

Problema 52. Joaquín quería dibujar dos triángulos equiláteros pegados para formar un rombo. Pero no midió bien todas las distancias y, una vez que terminó, Alejandra midió los cuatro ángulos y vio que no eran iguales. ¿Cuál de los cuatro segmentos es el más largo?



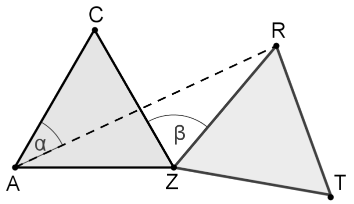
Problema 53. ¿Cuál es la máxima cantidad de caminos diferentes para llegar desde el punto A hasta el B en el gráfico siguiente?



Problema 54. Se da un número de seis dígitos. La suma de sus dígitos es par, el producto de sus dígitos es impar. ¿Cuál es la afirmación correcta sobre el número?

a. Ya sea 2 o 4 dígitos del número son par.
b. Un número así no existe.
c. La cantidad de dígitos impares del número es impar.
d. El número puede estar formado por dígitos diferentes entre ellos.
e. Ninguna de las Anteriores.

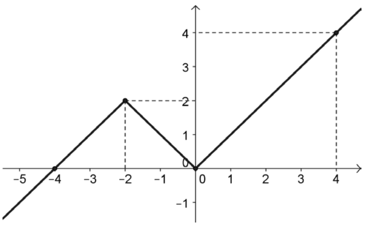
Problema 55. El triángulo RZT es el resultado del triángulo equilátero AZC al girarlo alrededor del punto Z, donde $\beta = \angle CZR = 70°$. Determine el valor del ángulo $\alpha = \angle CAR$.



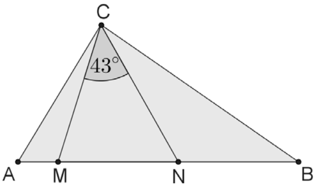
Problema 56. Considere un rectángulo, en el que uno de sus lados mide 5 unidades. El rectángulo puede ser cortado en un cuadrado y un rectángulo de lados enteros, uno de los cuales tiene área 4. ¿Cuántos rectángulos existen que cumplan con esto?

Problema 57. El número n es el entero positivo más grande para el cuál $4n$ es un número de tres dígitos, y m es el entero positivo más pequeño para el cual $4m$ es un número de tres dígitos. ¿Cuál es el valor de $4n-4m$?

Problema 58. Victor ha dibujado el gráfico de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, compuesto por dos rectas y un segmento de línea (ver figura). ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(f(f(x))) = 0$?



Problema 59. En el triángulo ABC los puntos M y N en el lado AB están ubicados de manera tal que $AN = AC$ y $BM = BC$. Encuentre el valor del ángulo $\angle ACB$ si $\angle MCN = 43°$.



Problema 60. ¿Cuántos pares (x, y) de números enteros satisfacen la ecuación $x^2 \cdot y^3 = 6^{12}$?

Problema 61. Una caja contiene 900 cartas numeradas del 100 al 999. Dos cartas cualesquiera tienen números diferentes. Francisco toma algunas cartas y saca la suma de los dígitos de cada una. ¿Cuántas cartas debe tomar para asegurarse de tener tres cartas cuya suma sea igual?

Problema 62. Sea $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ la función definida por $f(n) = \frac{n}{2}$ si n es par, y por $f(n) = \frac{n-1}{2}$ si n es impar , para todos los números naturales n. Para el entero positivo k, $f^k(n)$ denota la expresión $f(f(\ldots f(n)\ldots))$, donde el símbolo f aparece k veces. Entonces el número de soluciones de la ecuación $f^{2013}(n) = 1$ es:

Problema 63. Sea $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ la función definida por las siguientes propiedades: f es periódica de periodo 5 y la restricción de f al intervalo $[-2, 3]$ es $x \to f(x) = x^2$. ¿Cuánto vale $f(2013)$?

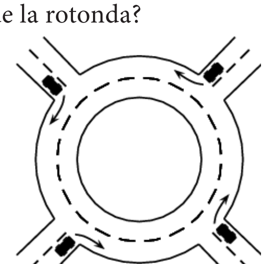
Problema 64. ¿Cuántas soluciones (x, y), donde x e y son números reales, tiene la ecuación $x^2 + y^2 = |x| + |y|$?

Problema 65. Hay algunas rectas dibujadas en el plano. La recta a intersecta exactamente a tres rectas y la recta b intercecta exactamente a 4 rectas. La recta c intercecta exactamente n rectas, con $n \neq 3, 4$. Determine el número de rectas dibujadas en el plano.

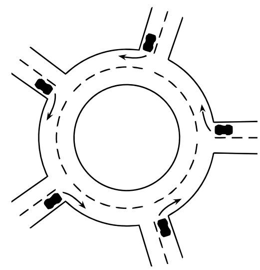
Problema 66. ¿Cuántos pares (x, y) de enteros con $x \leq y$ existen de manera que su producto sea 5 veces la suma de ambos?

Problema 67. Una secuencia comienza como $1, -1, -1, 1, -1$. Después del quinto término, cada término es igual al producto de los dos términos anteriores. Por ejemplo, el sexto término es igual al producto del cuarto término y el quinto término. ¿Cuál es la suma de los primeros 2013 términos?

Problema 68. Cuatro vehículos entran a una rotonda al mismo tiempo, cada uno de ellos desde una dirección diferente. Cada uno de los vehículos maneja por menos de una vuelta por la rotonda, y no hay ninguna pareja de carros que salgan por la misma dirección. ¿Cuántas maneras diferentes hay para que los vehículos salgan de la rotonda?



Problema 69. A la rotonda de la figura, entran cinco autos al mismo tiempo, cada uno por una pista diferente. Cada auto maneja menos de una vuelta por ella y ningún auto sale de la rotonda por la misma dirección que otro. ¿Cuántas diferentes combinaciones hay para que los autos salgan de la rotonda?



Problema 70. Un tipo de entero positivo N es más pequeño que la suma de sus tres divisores más grandes (evidentemente, se excluye el mismo número N). ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a. Ese tipo de números son divisibles por 4.
b. Ese tipo de números son divisibles por 5.
c. Ese tipo de números son divisibles por 6.
d. Ese tipo de nímeros son divisibles por 7.
e. No existe ese tipo de números.

Problema 71. A partir de una lista de tres números, el procedimiento "cambiasuma" crea una nueva lista mediante la sustitución de cada número por la suma de los otros dos. Por ejemplo, de la lista 3, 4, 6 el "cambiasuma" da 10, 9, 7 y de esta nueva lista el "cambiasuma" da como resultado la lista 16, 17, 19. Si empezamos con la lista 1, 2, 3, ¿Cuántos "cambiasuma" consecutivos son requeridos para obtener el número 2013 en una lista?

Problema 72. ¿Cuántos triángulos hay, cuyos vértices son escogidos de un polígono regular de trece lados y el centro de la circunferencia circunscrita al polígono quede dentro del triángulo?

Problema 73. Un vehículo partió del punto A y anduvo por un camino recto a una velocidad de 50km/h. Luego, a cada hora siguiente un nuevo vehículo parte del punto A a una velocidad 1km/h más rápida que el anterior. El último vehículo (a una velocidad de 100km/h) partió 50 horas después del primero. ¿Cuál es la velocidad del vehículo que va primero en la caravana 100 horas después de que partió el primero?

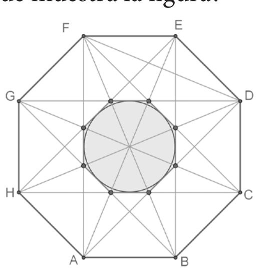
Problema 74. Un jardinero quiere plantar veinte árboles (alerces y robles) en una avenida del parque. Sabiendo que entre dos alerces no pueden haber tres árboles. ¿Cuál es el mayor número de alerces que puede plantar el jardinero?

Problema 75. Iván caminaba por la calle cuando vio un tractor que tiraba de una tubería. Decidiendo medir su longitud Iván caminó al lado de la tubería contra el movimiento del tractor y contó 20 pasos. Luego caminó en la misma dirección que el tractor y contó 140 pasos. Sabiendo que sus pasos miden un metro, Iván fue capaz de conocer la medida de la tubería. ¿Cuánto mide?

Problema 76. ¿Cuál de los siguientes números es el más grande?

a. 2013 **d.** 201^3
b. 2^{0+13} **e.** $20 \cdot 13$
c. 20^{13}

Problema 77. Los lados del octágono regular de la figura miden 10. ¿Cuál es el radio de la circunferencia inscrita en el octágono regular que muestra la figura?



Problema 78. Un prisma tiene 2013 caras. ¿Cuántas aristas tiene el prisma?

Problema 79. La raíz cúbica de 3^{3^3} es igual a:

Problema 80. El año 2013 tiene la propiedad de ser un número formado por los dígitos consecutivos 0, 1, 2 y 3. ¿Cuántos años han pasado desde la última vez que un año ha sido formado por 4 dígitos consecutivos?

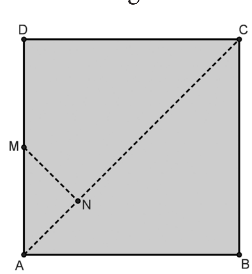
Problema 81. Sea f una función lineal para la cual $f(2013)-f(2001) = 100$. ¿Cuánto es $f(2031) - f(2013)$?

Problema 82. Seis súper héroes capturan a veinte villanos. El primer séper héroe captura un villano, el segundo captura dos villanos y el tercero captura tres. El cuarto súper héroe captura más villanos que cualquiera de los otros cinco héroes. ¿Cuál es el mínimo de villanos que pudo haber capturado el cuarto héroe?

Problema 83. Cuando cierta sustancia se derrite, su volumen se incrementa en $1/12$ ¿En cuánto decrece su volumen cuando vuelve a solidificarse?

Problema 84. ¿Cuántos enteros positivos existen de manera tal que $\frac{n}{3}$ y $3n$ sean enteros positivos de tres dígitos?

Problema 85. En la figura $ABCD$ es un cuadrado, M es el punto medio de AD y MN es perpendicular a AC. ¿Cuál es la razón entre el área del triángulo MNC y el área del cuadrado original?

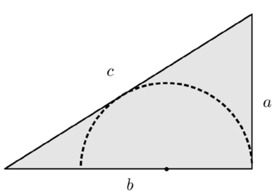


Problema 86. El abuelo Anacleto ha escrito los números del 1 al 120 en 15 filas, como se muestra en el diagrama. ¿Cuál de las columnas (de izquierda a derecha) tiene la mayor suma?

1				
2	3			
4	5	6		
…				
106	107	108	…	120

Problema 87. En veintidós cartas han sido escritos números enteros positivos desde el uno al veintidós. Con estas cartas se han hecho once fracciones. ¿Cuál es la máxima cantidad de dichas fracciones que pueden dar resultados enteros?

Problema 88. La figura siguiente muestra un triángulo rectángulo de lados *a, b* y *c*. ¿Cuál es el radio del semicírculo inscrito?



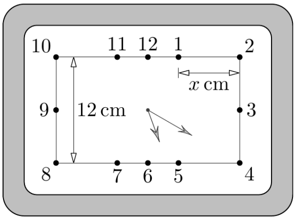
Problema 89. Andrés y Daniel recientemente tomaron parte en una maratón. Después de terminar, se dieron cuenta que Andrés terminó antes que el doble de personas que terminaron antes que Daniel, y que Daniel terminó antes que 1,5 de los corredores que terminaron antes que Andrés. Si Andrés finalizó en el vigésimo primer lugar. ¿Cuántos corredores compitieron en la maratón?

Problema 90. Julián ha escrito un algoritmo con el fin de crear una secuencia de números como

$$a_1 = 1, \;\; a_{m+n} = a_n + a_m + n \cdot m$$

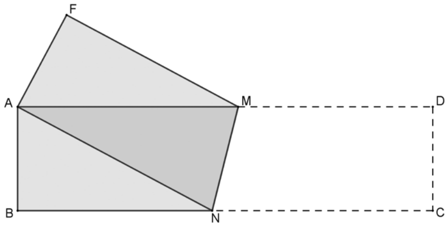
donde m y n son números naturales. Encuentre el valor de a_{2013}

Problema 91. El reloj del dibujo es rectangular, cada manecilla se mueve a una velocidad constante, como un reloj normal (circular). Si la distancia entre los números 8 y 10 es de 12 cm. Calcular la distancia entre 1 y 2.



Problema 92. Todos los boletos para la primera fila de una función de cine están vendidos. Las sillas están numeradas consecutivamente comenzando desde el 1. Pero al cine llegaron dos personas más con entradas falsificadas para sillas numeradas consecutivamente. La suma de los números de los boletos recaudadas es igual a 857. ¿Cuáles son los posibles números de los boletos falsificados?

Problema 93. Un pedazo de papel rectangular *ABCD* que mide 4cm × 16cm se dobla sobre la recta *MN* de tal forma que el vértice *C* coincida con el vértice *A*, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área del pentágono *ABNMF*?



Problema 94. Después de una lección de Álgebra, lo siguiente quedó en la pizarra: el gráfico de la función $y = x^2$ y 2013 rectas paralelas a la recta $y = x$ que cortan al eje y en 1, 2, . . . , 2013, cada una de las cuales intersecta al gráfico en dos puntos generando 4026 puntos. Calcular la suma de las ordenadas de estos puntos de intersección de las rectas y la parábola.

Problema 95. El abuelo Anacleto matemático jubilado y aventurero suma los primeros n enteros positivos (consecutivos) hasta obtener un número de 3 dígitos donde todos los dígitos son iguales. ¿Cuántos números sumó el abuelo?

Problema 96. Los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y 10 están escritos alrededor de un círculo en orden arbitrario. Sumamos todos los números con sus vecinos, obteniendo diez sumas. ¿Cuál es el máximo valor posible para la más pequeña de estas sumas?

Problema 97. ¿Cuántos enteros positivos son múltiplos de 2013 y tienen exactamente 2013 divisores (incluyendo a 1 y al mismo número)?

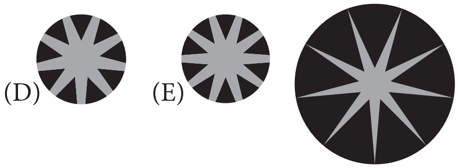
Problema 98. Juan elige un entero positivo de 5 cifras y borra uno de sus dígitos para convertirlo en un número de 4 cifras. La suma de este número de 4 cifras con el número de 5 cifras es 52713. ¿Cuál es la suma de los dígitos del número original de 5 cifras?

Problema 99. En una isla solo habían dos tipos de personas, los caballeros (que siempre dicen la verdad) y los bribones (que siempre mienten). Conocí dos hombres que vivían allí y le pregunté al más alto si ambos eran caballeros. El respondió, pero no pude darme cuenta de que era cada uno, así que le pregunté al hombre más bajo si el más alto era caballero. Me respondió, y después de eso supe que tipo era cada uno. ¿Eran caballeros o bribones?

a. Ambos eran caballeros.
b. Ambos eran mentirosos.
c. El más alto era caballero y el más bajo era mentiroso.
d. El más alto era mentiroso y el más bajo era caballero.
e. No se da suficiente información.

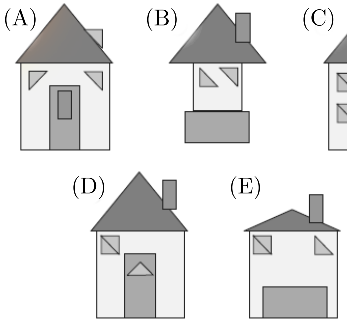
Problema 100. Un cubo esta ubicado en el espacio de manera tal que tres de sus vértices (no todos sobre la misma cara) son $P(3, 4, 1)$, $Q(5, 2, 9)$ y $R(1, 6, 5)$. Encuentra el centro del cubo.

Problema 101. ¿Qué dibujo es la parte central de la estrella que se muestra en la imagen?



Problema 102. Juan quiere insertar el dígito 3 en algún lugar del número 2014. ¿Dónde se debe insertar el dígito 3 si el quiere que su número de cinco dígitos sea lo más pequeño posible?

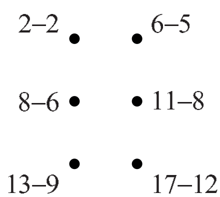
Problema 103. ¿Qué pareja de casas fueron hechas usando exactamente las mismas piezas de forma triangular o rectangular?

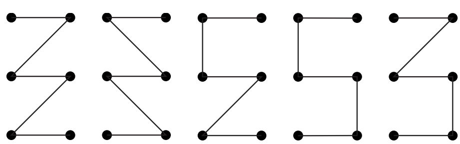


Problema 104. Cuando Koko el Koala no duerme, come 50 gramos de hojas por hora. Ayer, él durmió durante 20 horas. ¿Cuántos gramos de hojas comió ayer?

Problema 105. Alicia tiene 10 nietos. Fernanda es la mayor. Un día la abuela se da cuenta que sus nietos tienen todos edades distintas. Si la suma de las edades de sus nietos es 180, ¿Cuál es la edad mínima que Fernanda puede tener?

Problema 106. María realiza 6 restas y obtiene como resultados los números desde el 0 al 5. Ella une los puntos de menor a mayor, comenzando en el punto con el resultado 0 y terminando en el punto con el resultado 5. ¿Cuál figura ella obtiene?

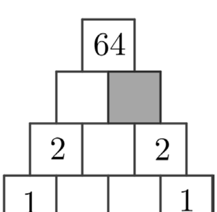




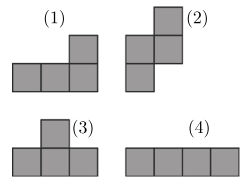
(A) (B) (C) (D) (E)

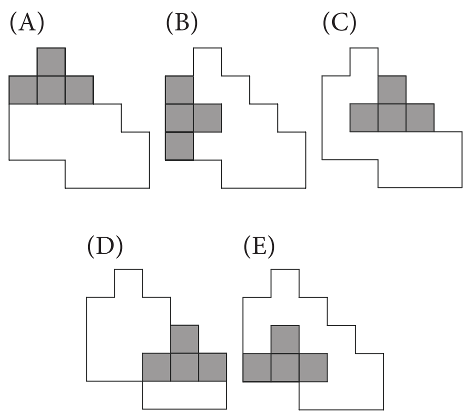
Problema 107. Alan construyó menos castillos de arena que Martín, pero más que Susana. Lucía construyó más castillos que Alan y que Martín. Daniela construyó más castillos que Martín y menos que Lucía. ¿Quién de ellos construyó más castillos de arena?

Problema 108. Mónica escribe números en el diagrama de manera que cada número sea el producto de los dos números de abajo. ¿Qué número debería escribir en la celda gris?

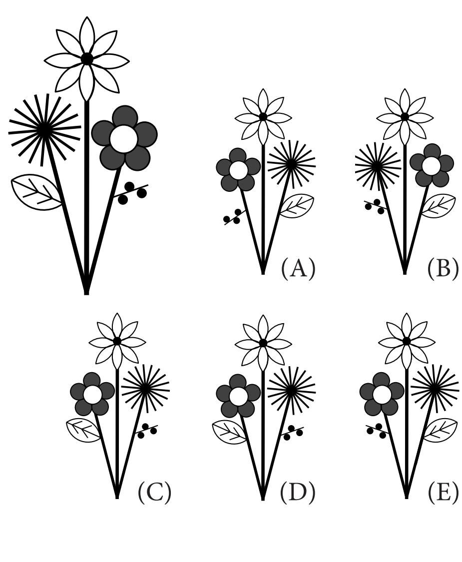


Problema 109. Ana tiene cuatro piezas, las cuales se muestran en la imagen. Con esas piezas ella puede cubrir completamente solo una de las siguientes figuras. ¿Cuál de las siguientes ella puede cubrir con todas sus piezas?



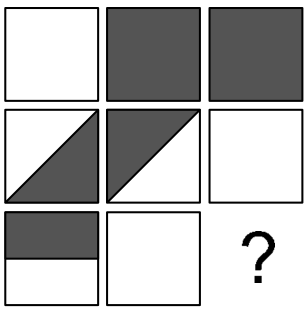


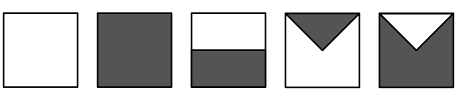
Problema 110. Bruno ha pintado flores en la ventana de la tienda (mire la figura). ¿Cómo se verán estas flores desde el otro lado de la ventana?



Problema 111. Había algunos dulces en un frasco. Sara tomó la mitad de los dulces y Juan tomó la mitad de los dulces restantes en el frasco. Después de eso, Clara tomó la mitad de los dulces que quedaban. Al final, quedaron 6 dulces en el frasco. ¿Cuántos dulces había en el frasco al comienzo?

Problema 112. ¿Cuál de las siguientes baldosas debe ser agregada en la imagen para que el área blanca sea tan grande como el área negra?

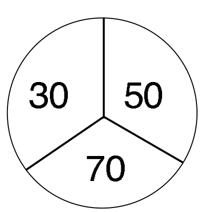




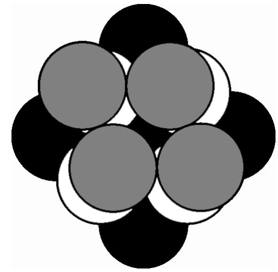
(A) (B) (C) (D) (E)

Problema 113. Paula dispara flechas al objetivo que se muestra en la figura. Cuando ella no acierta al objetivo, obtiene cero puntos. Paula dispara dos flechas y suma el puntaje de ambos disparos. ¿Cuál de las siguientes sumas no puede ser su puntaje?

a. 60
b. 70
c. 80
d. 90
e. 100

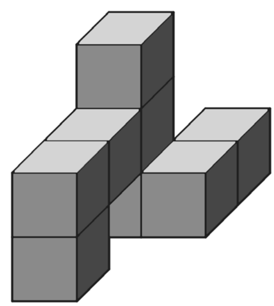


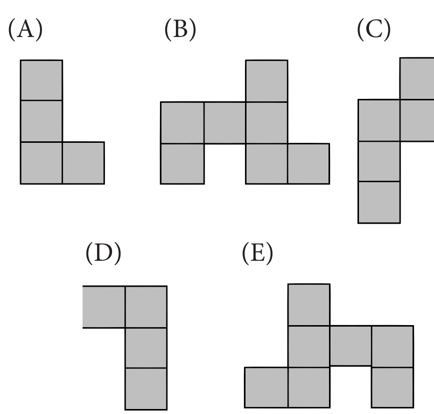
Problema 114. María tenía el mismo número de fichas grises, negras y blancas. Ella utilizó algunas de estas fichas para hacer una pila. En la figura, se pueden ver todas las fichas que utilizó. Ella todavía tiene cinco fichas que no están en la pila. ¿Cuántas fichas negras tenía al principio?



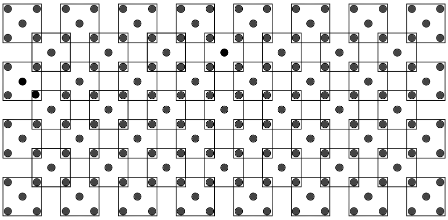
Problema 115. A un conejo le gustan mucho las zanahorias y el repollo. En un día se puede comer o 9 zanahorias, o 2 repollos, o 4 zanahorias y 1 repollo. Durante una semana ha comido 30 zanahorias. ¿Cuántos repollos ha comido durante esta semana?

Problema 116. El sólido de la imagen fue hecho pegando ocho cubos iguales entre sí. ¿Cómo se ve desde arriba?





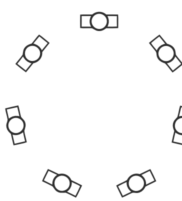
Problema 117. ¿Cuántos puntos hay en esta imagen?



Problema 118. ¿En el planeta canguro cada canguro-año tiene 20 canguro-meses y cada canguro-mes tiene 6 canguro-semanas. ¿Cuántas canguro-semanas hay en un cuarto de canguro-años?

Problema 119. Siete estudiantes (niños y niñas) están de pie en círculo. No hay dos niños de pie uno al lado del otro. No hay tres chicas de pie juntas una al lado de la otra. ¿Cuál de estas afirmaciones es cierta respecto al número de chicas que se ubicaron en el círculo?

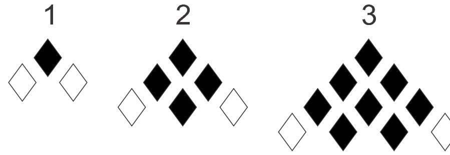
a. Solo 3 es posible
b. 3 y 4 es posible
c. Solo 4 es posible
d. 4 y 5 es posible
e. Solo 5 es posible



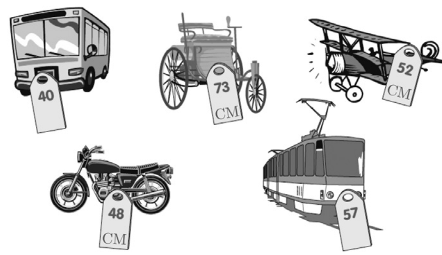
Problema 120. Evelyn ordenó cartas en línea como se muestra en la figura. En cada movimiento a Evelyn se le permite intercambiar cualquier par de cartas. ¿Cuál es el menor número de movimientos que Evelyn tiene que hacer para conseguir la palabra ALOCADOS?

O	L	D	C	S	O	A	A

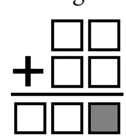
Problema 121. Se realiza una secuencia de triángulos de diamantes. En la figura se muestran las tres primeras etapas. En cada etapa se añade una línea de diamantes. En las líneas inferiores los diamantes exteriores son de color blanco. El resto de los diamantes en el triángulo son negros. ¿Cuántos diamantes negros tiene la figura en la etapa número 6?



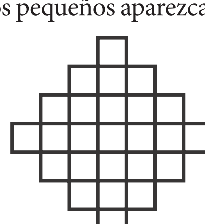
Problema 122. Un canguro compró juguetes y le entregó 150 canguro-monedas al asistente de la tienda. Recibió 20 canguro-monedas de vuelta. Luego cambió de opinión y cambió uno de los juguetes por otro. Le devolvieron 5 canguro-monedas. ¿Con qué juguetes salió el canguro de la tienda?



Problema 123. Escribe cada uno de los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 en los cuadrados para hacer la adición correcta. ¿Qué dígito estará en el cuadrado gris?



Problema 124. ¿Cuál es el mayor número de cuadrados pequeños que pueden ser sombreados para que ningún cuadrado de la forma: echo de cuatro cuadrados sombreados pequeños aparezca en la figura?

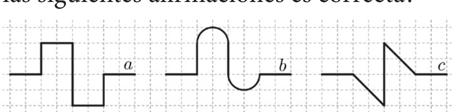


Problema 125. Nicole ha escrito cada uno de los números del 1 al 9 en las celdas de la tabla 3×3. Solo cuatro de estos números se pueden ver en la figura. Nicole se ha dado cuenta de que para el número 5 la suma de los números en las celdas vecinas es igual a 13 (las celdas vecinas son aquellas celdas que comparten lados). Se dio cuenta que lo mismo se aplica para el número 6. ¿Qué número ha escrito Nicole en la celda sombreada?

1		2
4		3

Problema 126. El barco *MSC Fabiola* tiene el récord de ser el mayor buque contenedor en cruzar el canal de Panamá. Lleva 12500 contenedores que si se ubicaran de extremo a extremo alcanzarían una distancia de 75 km. ¿Cuál es la longitud de un contenedor?

Problema 127. Si a, b y c denotan las longitudes de las líneas de la imagen, ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

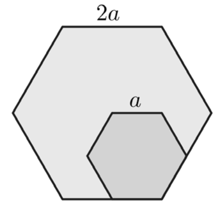


a. $a<b<c$
b. $a<c<b$
c. $b<a<c$
d. $b<c<a$
e. $c<b<a$

Problema 128. ¿Qué número está en el medio de $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$?

Problema 129. En el número 2014 el último dígito es más grande que la suma de los otros tres dígitos. ¿Cuántos años atrás fue la última vez que ocurrió esto?

Problema 130. La longitud de los lados del hexágono regular grande es dos veces la longitud de los lados del hexágono regular pequeño. El hexágono pequeño tiene una superficie de 4 cm^2. ¿Cuál es el área del hexágono grande?

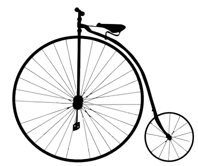


Problema 131. ¿Cuál es la negación de la siguiente declaración: “Todo el mundo resuelve más de 20 problemas”?

Problema 132. En un sistema de coordenadas Tom dibujó un cuadrado. Una de sus diagonales se encuentra en el eje x. Las coordenadas de los dos vértices que están en el eje x son $(-1, 0)$ y $(5, 0)$. ¿Cuál de las siguientes son las coordenadas de otro vértice del cuadrado?

Problema 133. En un pueblo, la razón entre hombres adultos y mujeres adultas es de 2 : 3 y la razón entre las mujeres y los niños es de 8 : 1. ¿Cuál es la razón entre los adultos (hombres y mujeres) y los niños?

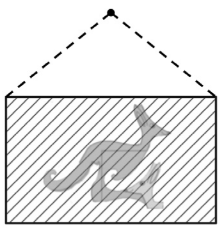
Problema 134. La rueda grande de esta bicicleta tiene 4,2 metros de perímetro. La rueda pequeña tiene 0,9 metros de perímetro. En un determinado momento, las válvulas de las dos ruedas están en su punto más bajo. La bicicleta rueda hacia la izquierda. ¿Después de cuántos metros estarán nuevamente las dos válvulas en su punto más bajo?



Problema 135. Una abuela, su hija y su nieta pueden decir este año (2014) que la suma de sus edades es 100. ¿En qué año nació la nieta si cada una de las edades es una potencia de 2?

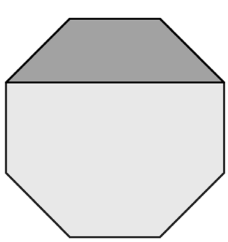
Problema 136. Pablo puso algunos cuadros rectangulares en la pared. Por cada foto puso un clavo en la pared 2,5 m por encima del suelo y adjuntó una larga cadena de 2 m en las dos esquinas superiores. ¿Cuál de las siguientes fotos es la más cercana al suelo (formato: ancho en cm × altura en cm)?

a. 60 × 40
b. 120 × 50
c. 120 × 90
d. 160 × 60
e. 160 × 100



Problema 137. Seis niñas comparten un departamento con dos baños que utilizan todas las mañanas a partir de las 7:00 en punto. Ellas usan el baño una a la vez, y se sientan a desayunar juntas tan pronto como la última chica ha terminado. Pasan 9, 11, 13, 18, 22 y 23 minutos en el baño respectivamente. Estando bien organizadas, ¿Qué es lo más temprano que pueden desayunar juntas?

Problema 138. En la siguiente figura hay un octágono regular. El área sombreada mide 3 cm^2. Encontrar el área del octágono.



Problema 139. Una nueva especie de cocodrilo ha sido descubierta en África. La longitud de la cola es de un tercio de toda su longitud. Su cabeza es de 93 cm de largo y esta corresponde a la cuarta parte de la longitud del cocodrilo sin su cola. ¿Cuánto mide este cocodrilo en cm?

Problema 140. En la imagen hay un dado especial. Los números en las caras opuestas siempre suman lo mismo. Los números que no podemos ver en la imagen son todos números primos. ¿Qué número es opuesto al 14?

Problema 141. Ana ha caminado 8 kilómetros con una velocidad de 4 km/h. Ahora ella correrá algún tiempo con una velocidad de 8km/h. ¿Cuánto tiempo le queda por correr para que su velocidad promedio global sea de 5km/h?

Problema 142. Un jugador de ajedrez jugó 40 partidos y acumuló 25 puntos (una victoria cuenta como un punto, un empate cuenta como medio punto, y una derrota cuenta como cero puntos). ¿Cuál es la diferencia entre los partidos ganados y los partidos perdidos?

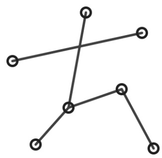
Problema 143. Las trillizas Javiera, Daniela y Luisa querían comprar sombreros idénticos. Sin embargo, a Javiera le faltaba un tercio del precio, a Daniela un cuarto y a Luisa un quinto. Cuando los sombreros estuvieron $940 más baratos, las hermanas juntaron sus ahorros y cada una de ellas compró un sombrero. No les sobró ni un peso. ¿Cuál era el precio de un sombrero antes de que su precio disminuyera?

Problema 144. Sean p, q, r números enteros positivos y $p + \dfrac{1}{q + \frac{1}{r}} = \dfrac{25}{19}$

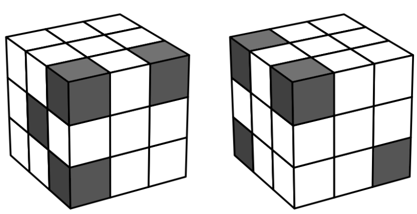
¿Cuál es el valor del producto pqr?

Problema 145. En la ecuación $N \cdot U \cdot (M + E + R + O) = 33$, cada letra representa un dígito diferente (0, 1, 2, . . . , 9). ¿Cuántas maneras diferentes hay para elegir los valores de las letras?

Problema 146. En la imagen que se muestra, Karina quiere añadir algunos segmentos de línea de tal manera que cada uno de los siete puntos tenga el mismo número de conexiones a los otros puntos. ¿Cuál es el menor número de segmentos de línea que Karina debe dibujar?



Problema 147. La imagen muestra el mismo cubo desde dos puntos de vista diferentes. Está construido a partir de 27 cubos pequeños, algunos de ellos son de color negro y algunos son blancos. ¿Cuál es el mayor número de cubos negros que podría haber?

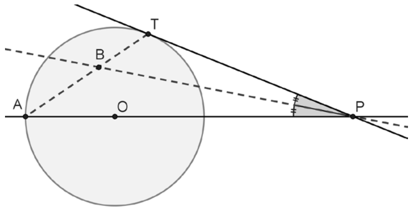


Problema 148. En una isla, las ranas son siempre verdes o azules, cuando el número de ranas verdes se redujo el 60%, el número de ranas azules aumentó el 60%. Resultó que la nueva relación de las ranas azules a las ranas verdes es igual a la relación anterior, pero en el orden opuesto (ranas verdes a las ranas azules). ¿En qué porcentaje se modificó el número total de las ranas?

Problema 149. Tomás escribió varios números enteros positivos distintos, sin exceder de 100. Si el producto de estos números no es divisible por 18. A lo más, ¿cuántos números podría haber escrito?

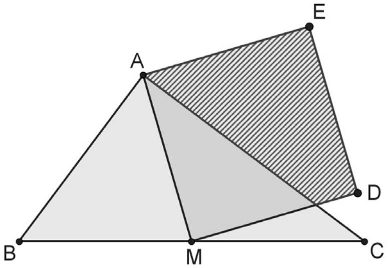
Problema 150. Con cualquier trío de vértices de un cubo que no están sobre una misma cara formamos un triángulo. ¿Cuántos triángulos se pueden formar con esta condición?

Problema 151. En la imagen, PT es tangente a una circunferencia C con centro O y PB bisectriz del ángulo TPA. Calcula el ángulo TBP.



Problema 152. Considere el conjunto de todos los números de 7 dígitos que se pueden obtener utilizando, para cada número, todos los dígitos 1, 2, 3, ..., 7. Enumere los números de la serie en orden creciente y divida la lista exactamente en la mitad en dos partes de igual tamaño. ¿Cuál es el último número de la primera mitad?

Problema 153. Sea ABC un triángulo tal que $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm y $BC = 10$ cm y sea M el punto medio de BC. $AMDE$ es un cuadrado, y MD intersecta AC en el punto F. Encontrar el área del cuadrilátero $AFDE$ en cm^2.

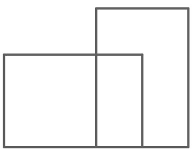


Problema 154. Hay 2014 personas en una fila. Cada uno de ellos es un mentiroso (que siempre miente) o un caballero (que siempre dice la verdad). Cada persona dice "Hay más mentirosos a mi izquierda que caballeros a mi derecha". ¿Cuántos mentirosos hay en la fila?

Problema 155. Cada año, el tercer jueves del mes de marzo aparece el Trauco en Chiloé. ¿Cuál es la fecha más tardía en que puede aparecer el Trauco algún año?

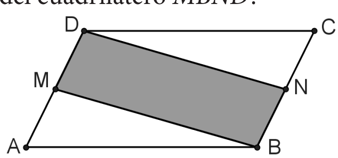
a. 14 de marzo
b. 15 de marzo
c. 20 de marzo
d. 21 de marzo
e. 22 de marzo

Problema 156. ¿Cuántos cuadriláteros de cualquier tamaño se muestran en la figura?



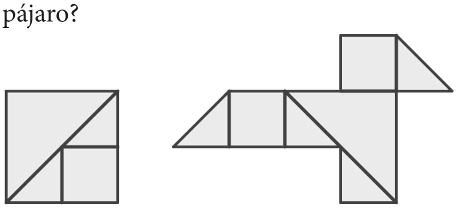
Problema 157. ¿Cuál es el resultado de $2014 \cdot 2014 \div 2014 - 2014$?

Problema 158. El área del paralelogramo *ABCD* es 10. Los puntos *M* y *N* son puntos medios de los lados *AD* y *BC*. ¿Cuál es el área del cuadrilátero *MBND*?



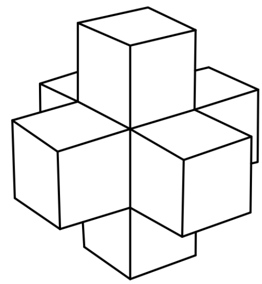
Problema 159. El producto de dos números es 36 y la suma es 37. ¿Cuál es la diferencia positiva entre ellos?

Problema 160. Amanda tiene varios cuadrados de papel de área 4. Ella los corta en cuadrados y en triángulos rectángulos de la forma en que se muestra en el primer diagrama. Luego toma algunas de las piezas y hace un pájaro como se muestra en el segundo diagrama. ¿Cuál es el área de este pájaro?



Problema 161. Un estanque estaba lleno hasta su mitad, el abuelo Anacleto añadió 2 litros al estanque. Ahora el estanque Está lleno a tres cuartos de su capacidad. ¿Cuál es la capacidad del estanque?

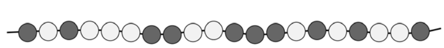
Problema 162. Jorge construyó el cuerpo que se muestra a continuación usando siete unidades cúbicas. ¿Cuántos cubos tiene que agregar para hacer un cubo con aristas de longitud 3?



Problema 163. ¿Cuál de los siguientes cálculos entrega el resultado más grande?

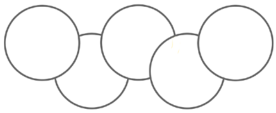
a. 44×777
b. 55×666
c. 77×444
d. 88×333
e. 99×222

Problema 164. El collar de la imagen contiene perlas grises y perlas blancas. Marcos saca una perla tras otra del collar. Siempre saca una perla de uno de los extremos. Se detiene cuando ha quitado la quinta perla gris. ¿Cuál es el mayor número de perlas blancas que Marcos puede haber sacado?

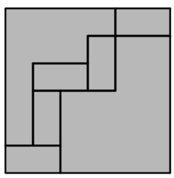


Problema 165. Juan tiene una lección de piano dos veces en la semana y Alejandra tiene una lección de piano cada dos semanas. En un momento determinado, Juan tiene 15 lecciones más que Alejandra. ¿Cuántas semanas de lecciones lleva?

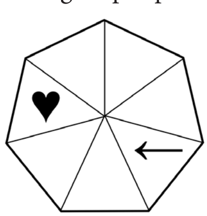
Problema 166. En el diagrama, el área de cada círculo es $1 cm^2$. El área común a dos círculos superpuestos es $18cm^2$. ¿Cuál es el área de la región cubierta por los cinco círculos?



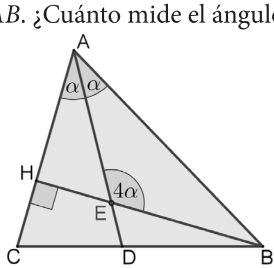
Problema 167. Cinco rectángulos iguales se colocan dentro de un cuadrado de 24cm de lado, como se muestra en el diagrama. ¿Cuál es el área de uno de los rectángulos resultantes?



Problema 168. El corazón y la flecha están en las posiciones mostradas en la figura. Al mismo tiempo, el corazón y la flecha empiezan a moverse. La flecha se mueve tres lugares hacia la derecha y el corazón se mueve cuatro lugares hacia la izquierda y luego se detiene. Siguen la misma rutina una y otra vez. ¿Después de cuántas veces repetida la rutina se encontrará el corazón y la flecha en el mismo triángulo por primera vez?



Problema 169. La figura muestra el triángulo *ABC* en donde *BH* es una altura y *AD* es bisectriz del ángulo en *A*. El ángulo obtuso entre *BH* y *AD* es cuatro veces el ángulo *DAB*. ¿Cuánto mide el ángulo *CAB*?



Problema 170. Un rectángulo tiene lados de longitudes 6cm y 11cm. Se selecciona uno de los lados largos y se dibujan las bisectrices de los ángulos en cada extremo de ese lado. Estas bisectrices dividen el otro lado largo en tres partes. ¿Cuáles son las longitudes de estas secciones?

Problema 171. El Capitán Sparrow y su tripulación pirata desenterraron varias monedas de oro. Ellos dividen las monedas entre sí de manera que cada persona recibe el mismo número de monedas. Si hubiera cuatro piratas menos en la tripulación, entonces cada persona recibiría 10 monedas más. Sin embargo, si hubiera 50 monedas menos, cada persona recibiría 5 monedas menos. ¿Cuántas monedas desenterraron?

Problema 172. El promedio de dos números positivos es 30% menos que uno de ellos. ¿En qué porcentaje es mayor este promedio que el otro número?

Problema 173. Una pesa no está funcionando correctamente. Si algo es más ligero que 1000 g, la pesa muestra el peso correcto. Sin embargo, si algo es más pesado o igual que 1000 g, la pesa puede mostrar cualquier número por encima de 1000 g. Tenemos 5 pesos *A, B, C, D, E* cada uno bajo los 1000 g. Cuando se pesan de dos en dos la pesa muestra lo siguiente:

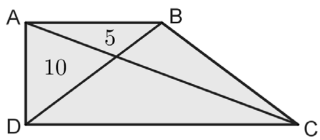
$B + D = 1200$, $C + E = 2100$, $B + E = 800$, $B + C = 900$, $A + E = 700$.

¿Cuál de estos es el que más pesa?

Problema 174. Andrés escribe todos los dígitos del 1 al 9 en las celdas de una tabla de 3×3, de manera que cada celda contiene un dígito. Él ya ha escrito el 1, 2, 3 y 4, como se muestra en la figura. Dos números son considerados como vecinos si sus celdas comparten un borde. Una vez introducidos todos los números se da cuenta de que la suma de los vecinos de 9 es 15. ¿Cuál es la suma de los vecinos de 8?

1		3
2		4

Problema 175. El cuadrilátero *ABCD* tiene ángulos rectos en los vértices *A* y *D*. Los números muestran las áreas de dos de los triángulos. ¿Cuál es el área de *ABCD*?



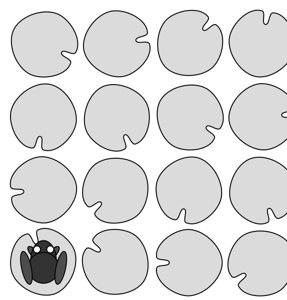
Problema 176. Liz y María compiten en la resolución de problemas. A cada una de ellas se les da la misma lista de 100 problemas. La primera en resolver cualquiera de estos problemas obtiene 4 puntos, mientras que la segunda en resolverlo obtiene 1 punto. Liz resolvió 60 problemas, y María también resolvió 60 problemas. Juntas, consiguieron 312 puntos. ¿Cuántos problemas fueron resueltos por ambas?

Problema 177. David viaja en su bicicleta desde Temuco a su parcela. Él debía llegar a las 15:00, pero gastó 2/3 del tiempo planeado cubriendo 3/4 de la distancia. Después de eso, pedaleó más lentamente y llegó justo a tiempo. ¿Cuál es la razón entre la velocidad de la primera parte del viaje y la velocidad de la segunda parte del viaje?

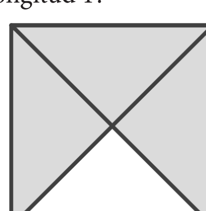
Problema 178. En grupo de 25 personas formado por caballeros, niños y damas, los caballeros siempre dicen la verdad, los niños siempre mienten, y de las damas algunas mienten y otras dicen la verdad. Cuando se les preguntó: “¿Es usted una dama?”, 12 de ellos dijeron: “Sí”. Cuando se les preguntó: “¿Es usted un niño?”, 8 de ellos dijeron: “Sí”. ¿Cuántos caballeros hay en el grupo?

Problema 179. Diferentes números enteros positivos se escriben en el pizarrón. Exactamente dos son divisibles por 2 y exactamente 13 de ellos son divisibles por 13. Sea *M* el más grande de estos números. ¿Cuál es el menor valor posible de *M*?

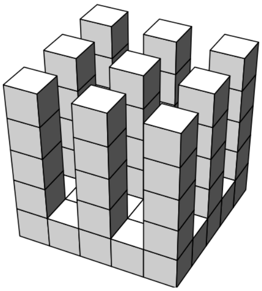
Problema 180. En un estanque hay 16 hojas de lirio de agua formando un patrón de 4 por 4 como se muestra en la imagen. Una rana se sienta en una hoja en una de las esquinas. A continuación, salta de una hoja a otra, ya sea horizontal o verticalmente. La rana siempre salta por encima de al menos una hoja y nunca cae en la misma hoja dos veces. ¿Cuál es el mayor número de hojas (incluyendo la hoja en la que se encuentra) que la rana puede alcanzar?



Problema 181. Una plaza de 5×5 Está hecha de 25 azulejos de 1×1, todos los azulejos con el mismo patrón, tal como el azulejo que se muestra en la figura. Se sabe que en la plaza siempre dos baldosas adyacentes tienen el mismo color a lo largo del borde compartido. El perímetro de la plaza se compone de segmentos blancos (lados de triángulos blancos) y grises (lados de triángulos grises) de longitud 1. ¿Cuál es el menor número posible de tales segmentos grises de longitud 1?



Problema 182. De un cubo de $5 \times 5 \times 5$ formado por cubos pequeños de $1 \times 1 \times 1$ se han sacado algunos cubos pequeños, quedando el cuerpo que se muestra en la figura. ¿Cuántos cubos pequeños $1 \times 1 \times 1$ se han sacado?



Problema 183. Hoy es el cumpleaños de Carla, Emilia y Liliana. La suma de sus edades es 44. ¿Cuál será la suma de sus edades, la próxima vez que esta vuelva a ser un número de dos dígitos iguales?

Problema 184. Si $a^b = \frac{1}{2}$ ¿Cuál es el valor de a^{-3b}?

Problema 185. Hay 48 pelotas colocadas en tres canastas de diferentes tamaños. La canasta más pequeña junto con la más grande, contienen dos veces el número de pelotas que contiene la canasta mediana. La canasta más pequeña contiene la mitad de número de pelotas que tiene la canasta del centro. ¿Cuántas pelotas hay en la canasta grande?

Problema 186. Calcule el valor de $\frac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}}$

Problema 187. ¿Cuál de estas expresiones no contiene $b + 1$ como un factor?

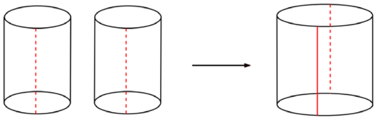
a. $2b + 2$
b. $b^2 - 1$
c. $b^2 + b$
d. $-1 - b$
e. $b^2 + 1$

Problema 188. ¿Cuántas cifras tendrá el resultado de la multiplicación: $(2^{22})^5 \cdot (5^{55})^2$?

Problema 189. Héctor tiene una cuenta de correo electrónico secreto que solo cuatro de sus amigos conocen. Hoy recibió 8 emails a esa cuenta. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a. Héctor recibió dos correos electrónicos de cada amigo.
b. Héctor no pudo haber recibido ocho correos electrónicos de un solo amigo.
c. Héctor recibió al menos un correo electrónico de cada amigo.
d. Héctor recibió por lo menos dos correos electrónicos de uno de sus amigos.
e. Héctor recibió al menos dos correos electrónicos de 2 amigos diferentes.

Problema 190. Dos cilindros idénticos se cortan a lo largo de las líneas punteadas y se pegan entre sí formando un cilindro más grande (ver figura). ¿Qué se puede decir sobre el volumen del cilindro grande en comparación con el volumen de un cilindro pequeño?



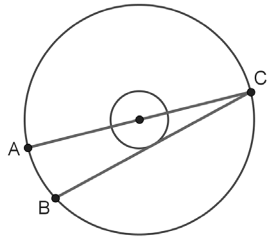
Problema 191. En el número 2014 los dígitos son diferentes y el último dígito es mayor que la suma de los otros tres dígitos ¿Cuántos años antes de 2014 ocurrió esto por última vez?

Problema 192. El tamaño de una caja rectangular es $a \times b \times c$, con $a < b < c$. Si aumenta a o b o c en un número positivo dado, el volumen de la caja también aumenta. ¿En cuál de los siguientes casos el volumen de la caja es mayor?

a. Si aumenta solo a.
b. Si aumenta solo b.
c. Si aumenta solo c.
d. El aumento de volumen es la misma en a), b), c).
e. Depende de los valores de a, b, c.

Problema 193. En un partido de fútbol, el ganador recibe 3 puntos, el perdedor recibe 0 puntos, mientras que en el caso de un empate, cada equipo obtiene 1 punto. Cuatro equipos, *A*, *B*, *C*, *D*, participan en un torneo de fútbol. Cada equipo juega tres partidos. Al final del torneo el equipo *A* obtiene 7 puntos y los equipos *B* y *C*, 4 puntos cada uno. ¿Cuántos puntos obtuvo el equipo *D*?

Problema 194. Los radios de dos círculos concéntricos están en la razón 1 : 3. *AC* es el diámetro del círculo grande; *BC* es una cuerda del círculo grande que es tangente al círculo más pequeño; y la longitud de la cuerda *AB* es 12. Calcule el radio del círculo grande.



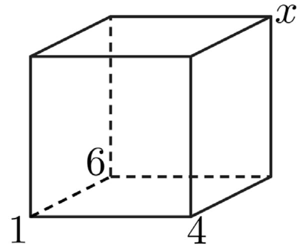
Problema 195. ¿Cuántas tripletas (*a*, *b*, *c*) de enteros con $a > b > c > 1$ satisface que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$?

Problema 196. *a*, *b*, *c* son números no nulos, n es un número entero positivo. Se sabe que los números $(-2)^{2n+3} \cdot a^{2n+2} \cdot b^{2n-1} \cdot c^{3n+2}$ y $(-3)^{2n+2} \cdot a^{4n+1} \cdot b^{2n+5} \cdot c^{3n-4}$ tienen el mismo signo. ¿Cuál de las siguientes alternativas es siempre verdadera?

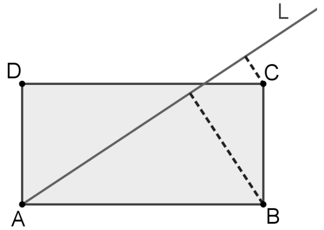
a. $a > 0$ **d.** $a < 0$
b. $b > 0$ **e.** $b < 0$
c. $c > 0$

Problema 197. Seis semanas son n! segundos. Calcule el valor de n.

Problema 198. Los vértices de un cubo se enumeran de 1 a 8 de manera que el resultado de la suma de los cuatro vértices de una cara es la misma para todas las caras. Los números 1, 4 y 6 ya se encuentran establecidos en algunos vértices como se muestra en la figura. ¿Cuál es el valor de *x*?



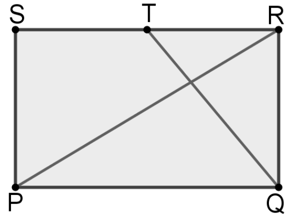
Problema 199. La línea *L* pasa por el vértice *A* de un rectángulo *ABCD*. La distancia del punto *C* a *L* es 2, y la distancia del punto *B* a *L* es 6. Si *AB* es el doble de *BC*, encontrar *AB*.



Problema 200. La función $f(x) = ax+b$ satisface las igualdades $f(f(f(1))) = 29$ y $f(f(f(0))) = 2$. ¿Cuál es el valor de *a*?

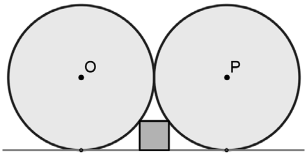
Problema 201. Hay 10 diferentes enteros positivos, exactamente 5 de ellos son divisibles por 5 y exactamente 7 de ellos son divisibles por 7. Sea *M* el más grande de estos 10 números. ¿Cuál es valor mínimo posible de *M*?

Problema 202. *PQRS* es un rectángulo. *T* es el punto medio *RS*. *QT* es perpendicular a la diagonal *PR*. ¿Cuál es la razón *PQ* : *QR*?



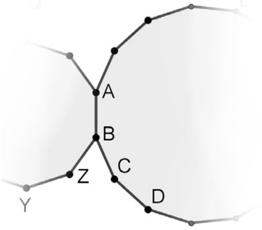
Problema 203. Hay 9 canguros, ellos son de color plata o de color oro. Cuando 3 canguros se encuentran por casualidad, la probabilidad de que ninguno de ellos sea color plata es $\frac{2}{3}$. ¿Cuántos canguros son de color oro?

Problema 204. Un cuadrado se ajusta perfectamente entre la línea horizontal y dos círculos tangentes de radio 1. ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado?



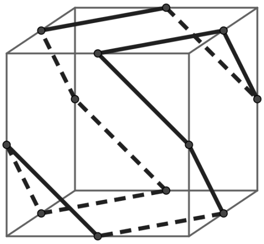
Problema 205. Tomás quiere escribir varios números enteros positivos distintos, ninguno de ellos mayor a 100. Por otra parte, el producto de todos estos números no debe ser divisible por 54. ¿Cuál es el máximo número de enteros que logra escribir?

Problema 206. Dos polígonos regulares de lado 1 tienen en común el lado AB. Uno de ellos $ABCD...$ tiene 15 lados y el otro $ABZY...$ tiene n lados. ¿Qué valor de n hace que la distancia CZ sea igual a 1?



Problema 207. Las igualdades:
$k = (2014 + m)^{1/n} = 1024^{1/n} + 1$ son dadas para enteros positivos k, m, n. ¿Cuántos valores diferentes puede tomar la cantidad m?

Problema 208. El diagrama muestra una poligonal cuyos vértices son los puntos medios de las aristas de un cubo. Un ángulo interior de la poligonal está definido de la forma habitual: el ángulo entre los dos bordes se encuentran en un vértice. ¿Cuál es la suma de todos los ángulos interiores de la poligonal?



Problema 209. La función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ satisface las condiciones $f(4)= 6$ y
$x \cdot f(x)= (x - 3) \cdot f(x + 1)$. ¿Cuál es el valor de $f(4) \cdot f(7) \cdot f(10) \cdot ... \cdot f(2011) \cdot f(2014)$?

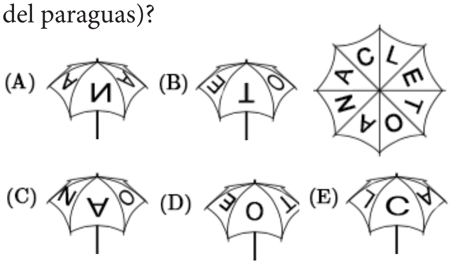
Problema 210. En los bosques de una isla mágica viven tres tipos de animales: leones, lobos y cabras. Los lobos pueden comer cabras, y los leones pueden comer lobos o cabras. Sin embargo, siendo esta una isla mágica, si un lobo se come una cabra, se convierte en león. Si un león se come una cabra, se convierte en lobo. Si un león se come un lobo, se convierte en una cabra. Originalmente, había 17 cabras, 55 lobos y 6 leones en la isla. En algún momento quedará un cierto número de animales que no podrá comerse entre ellos. ¿Cuál es el mayor número de animales que puede quedar en la isla?

Problema 211. Marcos tiene 9 dulces y Benjamín tiene 17 dulces. ¿Cuántos dulces necesita regalarle Benjamín a Marcos para que cada uno tenga el mismo número de dulces?

Problema 212. La mamá de Verónica compró 2 pizzas para el cumpleaños de su hija. La mamá cortó cada pizza en 8 partes, si en el cumpleaños había 14 niñas incluyendo a Verónica. ¿Cuántas rebanadas de pizza sobran si la madre le da un trozo de pizza a cada niña?

Problema 213. Hay 11 banderas ubicadas en línea recta a lo largo de una pista de carrera. La primera bandera Está en la partida y la última en la meta. La distancia entre cada bandera es de 8 metros. ¿Cuál es la medida de la pista?

Problema 214. Mi paraguas tiene la palabra ANACLETO escrita en la parte interior como se muestra en la imagen (mirando desde abajo del paraguas). ¿Cuál de las siguientes imágenes muestra la parte exterior de mi paraguas (mirado desde arriba del paraguas)?



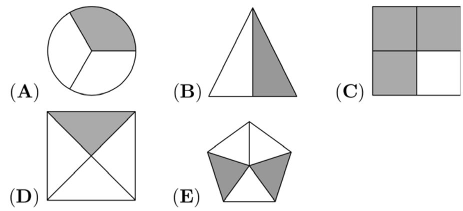
Problema 215. Un barco fue atacado por piratas. Los piratas se formaron en fila y uno por uno fueron ingresando al barco por una cuerda. El capitán pirata estaba en el medio de la fila y en el octavo lugar desde el principio de la fila. ¿Cuántos piratas estaban en la fila?

Problema 216. Durante 3 días Tom, el gato, estuvo cazando ratones. Cada día Tom cazaba 2 ratones más de los que había cazado en el día anterior. En el tercer día Tom cazó el doble de ratones de los que cazó el primer día. ¿Cuántos ratones cazó en total Tom durante los 3 días?

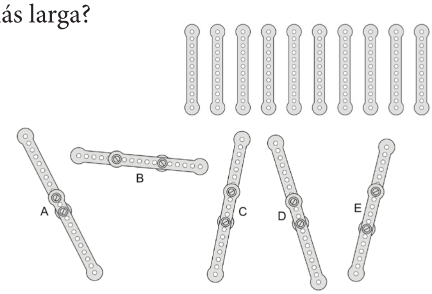
Problema 217. Ricardo y Sebastián están construyendo un iglú. Por cada hora que pasa, Ricardo hace 8 ladrillos de hielo y Sebastián hace dos ladrillos menos que Ricardo. ¿Cuántos ladrillos hacen juntos en tres horas?

Problema 218. Nos fuimos a un campamento de verano ayer a las 4:32 PM y llegamos a nuestro destino de hoy a las 6:11 AM. ¿Cuánto tiempo duró el viaje?

Problema 219. ¿En Cuál de las siguientes figuras se ha sombreado la mitad?



Problema 220. Hernán tenía 10 tiras de metal iguales. Él ha formado pares de tiras, creando cinco tiras largas. ¿Qué tira es la más larga?

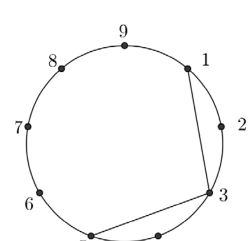


Problema 221. Si cada figura oculta un número y figuras iguales ocultan números iguales. ¿Qué número se oculta detrás de cada figura?

$$\triangle + 4 = 7$$

$$\square + \triangle = 9$$

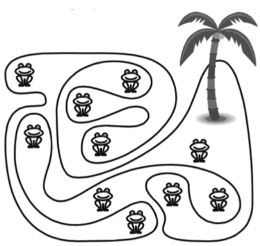
Problema 222. Dados 9 puntos en un círculo, se trazan segmentos a partir del punto 1 siempre saltando el punto vecino. Si realizamos este procedimiento hasta volver al primer punto, determine por cuántos puntos pasamos incluyendo el punto inicial.



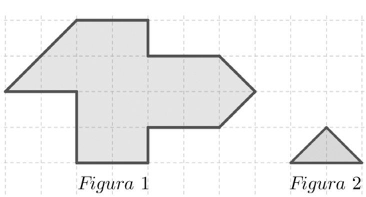
Problema 223. Lucas tenía 7 cangu-monedas de $1, 9 cangu-monedas de $2 y 3 cangu-billetes de $10. Él fue a una tienda en la que compró una pelota que costó $37. ¿Cuánto dinero tiene Lucas al salir de la tienda?

Problema 224. Un número entero tiene dos dígitos. El producto de los dígitos de este número es 15, ¿Cuál es la suma de los dígitos de este número?

Problema 225. En la figura, vemos una isla con una costa muy extraña y varias ranas. ¿Cuántas ranas están en la isla?

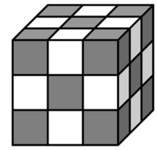


Problema 226. Alonso ha recortado a partir de un papel cuadriculado la forma que se muestra en la Figura 1. Ahora él quiere recortar esta forma en triángulos idénticos como los de la Figura 2. ¿Cuántos triángulos podrá conseguir?



Problema 227. Luis tiene 7 manzanas y 2 plátanos. Él regala 2 manzanas a Mónica y Mónica le da a cambio algunos plátanos a Luis. Ahora Luis tiene la misma cantidad de manzanas que de plátanos. ¿Cuántos plátanos le dio Mónica a Luis?

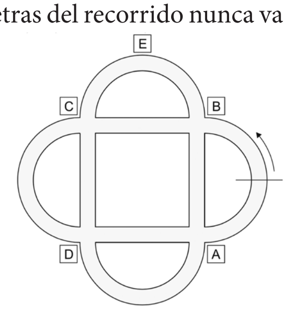
Problema 228. Juan construyó el cubo de la figura usando 27 pequeños cubos que son de color blanco o negro, de modo que siempre dos cubos pequeños que comparten una cara tienen distinto color. ¿Cuántos cubos blancos usó Juan?



Problema 229. En una carrera de velocidad, 10 participantes llegaron a la final. Tomás superó a 3 corredores más de los que no lo alcanzó. ¿En qué lugar terminó Tomás?

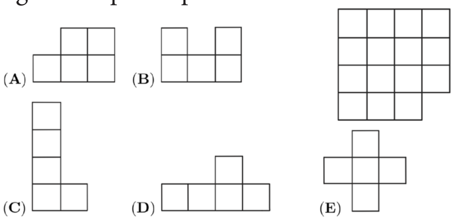
Problema 230. Silvana tiene 4 juguetes: un autito, una muñeca, una pelota y un barco. Silvana dejará sus juguetes en una repisa, de modo que el autito siempre esté entre el barco y el muñeco. ¿De Cuántas maneras se pueden ordenar los juguetes en la repisa?

Problema 231. Pedro pasea por el parque en su bicicleta como muestra la figura, iniciando el recorrido en el punto S y siguiendo la dirección de la flecha. En el primer cruce se gira a la derecha; luego, en el siguiente cruce, se gira a la izquierda; luego, a la derecha; luego, a la izquierda otra vez y así sucesivamente en ese orden, ¿Por Cuál de las letras del recorrido nunca va a pasar?

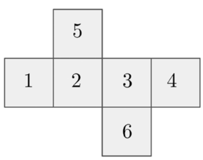


Problema 232. Hay 5 chinitas. Dos chinitas son amigas si el número de manchas que tienen difiere exactamente en una mancha. En el Día Canguro, cada una de las chinitas envía a cada una de sus amigas un saludo por SMS. ¿Cuántos saludos SMS fueron enviados?

Problema 233. La siguiente figura fue armada con tres piezas idénticas. ¿Cuál de las siguientes piezas permite esto?



Problema 234. En la figura se muestra la red de un cubo con caras numeradas, Sofía suma las parejas de números ubicados en las caras opuestas de este cubo. ¿Cuáles son los tres resultados obtenidos por Sofía?

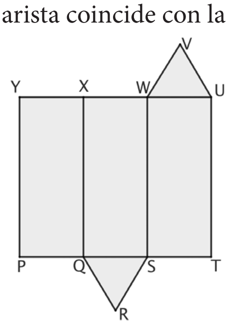


Problema 235. ¿Cuál de los siguientes números no es un número entero?

a. $\frac{2012}{2}$ **d.** $\frac{2015}{5}$
b. $\frac{2013}{3}$ **e.** $\frac{2016}{6}$
c. $\frac{2014}{4}$

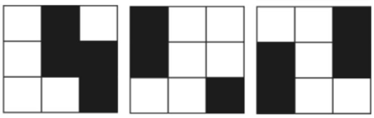
Problema 236. Un viaje desde Temuco a Valdivia pasando por la casa del abuelo Anacleto dura 130 minutos. La parte del viaje desde Temuco a la casa del abuelo dura 35 minutos. ¿Cuánto tiempo dura la parte del viaje desde la casa del abuelo hasta Valdivia?

Problema 237. El diagrama muestra la red de un prisma triangular. Al armar el prisma, ¿Qué arista coincide con la arista *UV*?

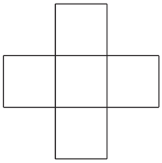


Problema 238. Un triángulo tiene lados de longitudes de 6, 10 y 11. Un triángulo equilátero tiene el mismo perímetro. ¿Cuál es la longitud del lado del triángulo equilátero?

Problema 239. Tenemos tres hojas transparentes con los patrones mostrados en la figura. Estas solamente se pueden rotar, por lo que no se pueden voltear. Si ponemos exactamente una encima de la otra y miramos el montón desde arriba. ¿Cuál es el máximo número posible de casillas negras visto en el montón?

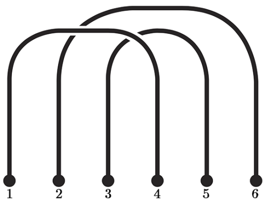


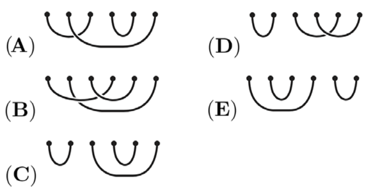
Problema 240. Los números 2, 3, 5, 6 y 7 se escriben en los casilleros de la cruz (ver figura), de modo que la suma de los números de la fila es igual a la suma de los números de la columna. ¿Cuál de estos números puede escribirse en el casillero del centro de la cruz?



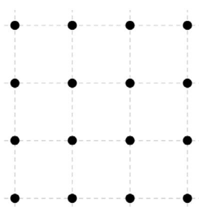
Problema 241. Raúl tiene diez cartas numeradas del 0 al 9. ´El distribuyó estas cartas entre tres amigos: Fernando sacó 3 cartas, Gregorio, 4 cartas y Andrés, 3 cartas. Luego, Raúl multiplicó los números de las cartas que consiguió cada uno de los amigos y los resultados fueron: 0 para Fernando, 72 para Gregorio y 90 para Andrés. ¿Cuál es la suma de los números en las cartas que Fernando recibió?

Problema 242. Tres cuerdas se ponen en el suelo como se muestra en la figura, quedando los extremos de las cuerdas alineados. Usted puede hacer una cuerda más grande agregando otros tres trozos de cuerda y uniendo los extremos de estos trozos a los trozos anteriores. ¿Cuál de las cuerdas que se muestran a continuación le dará una cuerda más grande?

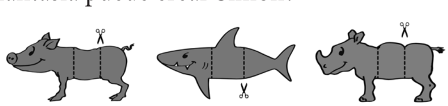




Problema 243. Se tienen 16 puntos en una hoja cuadriculada. Si de estos puntos se eligen 4 puntos que formen un cuadrado. ¿Cuántos cuadrados de distintas áreas es posible hacer?

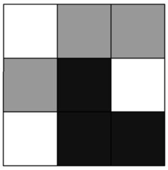


Problema 244. Simón dibuja un tiburón, un cerdo y un rinoceronte, y los corta en tres piezas cada uno como se muestra en la figura. Entonces él puede hacer distintos animales mediante la combinación de una cabeza, un tronco y una parte inferior. ¿Cuántos animales distintos, reales o de fantasía puede crear Simón?



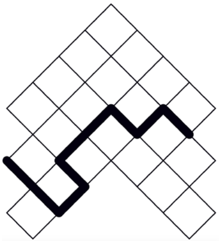
Problema 245. Ana, Beto, Carlos, David y Elisa cocinan galletas durante todo el fin de semana. Ana hizo 24 galletas; Beto, 25. Carlos, 26. David, 27; y Elisa, 28. Al terminar el fin de semana uno de ellos tenía el doble de las galletas que tenía el día sábado, uno 3 veces, uno 4 veces, uno 5 veces y uno 6 veces las galletas que tenía el día sábado. ¿Quién cocinó más galletas el día sábado?

Problema 246. Samuel pintó los 9 cuadrados con los colores negro, blanco y gris, como se muestra en la figura. Samuel quiere volver a pintar de manera que no queden dos cuadrados de un mismo color con un lado común, ¿Cuál es la mínima cantidad de cuadrados que se deben repintar?



Problema 247. Hay 10 patas. 5 de estas patas ponen un huevo cada día, mientras que las otras 5 ponen un huevo día por medio. ¿Cuántos huevos ponen las 10 patas en un plazo de 10 días?

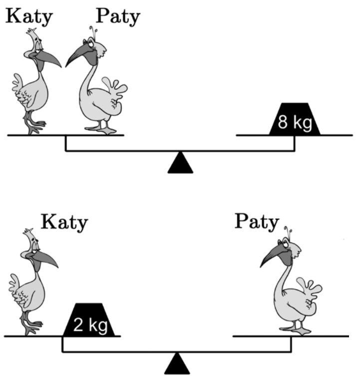
Problema 248. La figura muestra una tabla en la que cada cuadrado pequeño tiene un área de 4 cm^2. ¿Cuál es la longitud de la línea gruesa?



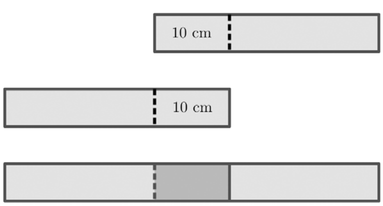
Problema 249. ¿Cuál de las siguientes fracciones es menor que 2?

a. $\frac{19}{8}$ **d.** $\frac{22}{11}$
b. $\frac{20}{9}$ **e.** $\frac{23}{12}$
c. $\frac{21}{10}$

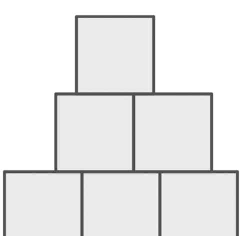
Problema 250. ¿Cuánto pesa Paty?



Problema 251. Alicia tiene 4 tiras de papel de la misma longitud, cada una con una solapa de 10 cm. Ella encola 2 de estas solapas y forma una tira de 50 cm de largo (pegando las solapas). Con las otras dos tiras de papel, ella quiere hacer una tira de 56 cm de largo. ¿Cuál debería ser el tamaño de la solapa que Alicia debe encolar?



Problema 252. Tomás utiliza 6 cuadrados del lado 1 y forma la figura de la imagen. ¿Cuál es el perímetro de esta figura?



Problema 253. Todos los días, Sofía anota la fecha y calcula la suma de los dígitos escritos. Por ejemplo, el 19 de marzo, lo escribe como 19/03 y calcula 1 + 9 + 0 + 3 = 13. ¿Cuál es la suma más grande que ella calcula durante el año?

Problema 254. En la calle Anacleto, hay 9 casas en una fila y al menos una persona vive en cada casa. Cada vez que sumamos los habitantes de dos casas vecinas obtenemos un máximo de 6 personas. ¿Cuál es el mayor número de personas que podrían estar viviendo en la calle Anacleto?

Problema 255. Lucía y su madre nacieron en enero. El día 19 de marzo de 2015, Lucía suma el año de su nacimiento con el año de nacimiento de su madre, con su edad y con la edad de su madre. ¿Qué resultado obtiene Lucía?

Problema 256. El área de un rectángulo es 12 cm2. Las longitudes de sus lados son números naturales. Entonces, el perímetro de este rectángulo podría ser:

a. 20 cm **d.** 32 cm
b. 26 cm **e.** 48 cm
c. 28 cm

Problema 257. En una bolsa hay 3 manzanas verdes, 5 manzanas amarillas, 7 peras verdes y 2 peras amarillas. Simón saca al azar frutas de la bolsa una por una. ¿Cuántas frutas debe sacar con el fin de estar seguro de que tiene al menos una manzana y una pera del mismo color?

Problema 258. En la siguiente suma, incógnitas iguales representan dígitos iguales e incógnitas distintas representan dígitos distintos. ¿Cuál es el dígito que Está representado por la letra *X*?

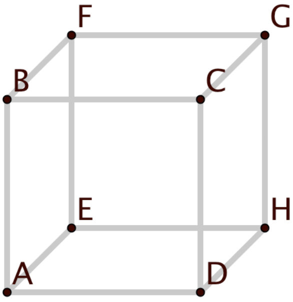
$$\begin{array}{r} X \\ X \\ \underline{+\,Y\,Y} \\ Z\,Z\,Z \end{array}$$

Problema 259. Marcela compró 3 juguetes. El primer juguete lo compró con la mitad de su dinero y \$1 más. Para el segundo juguete Marcela pagó la mitad del dinero restante y \$2 más. Por último, para el tercer juguete Marcela pagó la mitad del dinero restante y \$3 más. Si con este tercer juguete gastó todo su dinero, determine cuánto dinero tenía inicialmente.

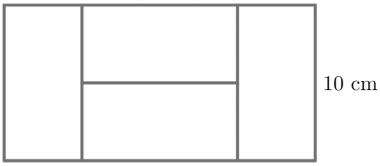
Problema 260. El número 100 se multiplica o bien por 2 o bien por 3, entonces al resultado le suma 1 o 2, y luego el nuevo resultado se divide ya sea por 3 o por 4 y el resultado final es un número natural. ¿Cuál es el resultado final?

Problema 261. En un número de 4 dígitos *ABCD*, los dígitos *A*, *B*, *C* y *D* están en orden estrictamente creciente de izquierda a derecha. Con los dígitos *B* y *D* se forma un número de dos dígitos y con los dígitos *A* y *C* se forma un otro número de dos dígitos. ¿Cuál es la mayor diferencia posible entre el número de dos dígitos *BD* y el número de dos dígitos *AC*?

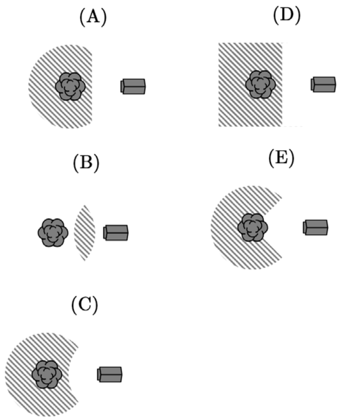
Problema 262. Catalina escribe algunos números entre 1 y 9 en cada cara de un cubo. Entonces, para cada vértice, suma los números de las tres caras que comparten ese vértice (por ejemplo, para el vértice *B*, suma los números de las caras *BCDA*, *BAEF* y *BFGC*). Las cifras calculadas por María para los vértices *C*, *D* y *E* son 14, 16 y 24, respectivamente. ¿Qué número se agregará al vértice *F*?



Problema 263. Con 4 rectángulos congruentes se forma un nuevo rectángulo como el que muestra la figura. Si la longitud del lado más corto de este nuevo rectángulo es 10 cm. Calcular el perímetro de dicho rectángulo.



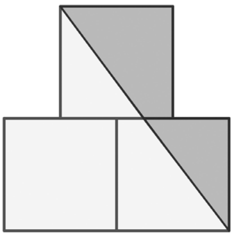
Problema 264. Cuando Simón, la ardilla, llega hasta el suelo, nunca va más allá de 5 metros desde el tronco de su árbol. Sin embargo, también se mantiene al menos a 5 metros de la casa del perro. ¿Cuál de las siguientes imágenes muestra con mayor precisión la forma del terreno donde Simón podría ir?



Problema 265. Un ciclista va a 5 metros por segundo. Las ruedas tienen un perímetro de 125 cm. ¿Cuántas vueltas completas hace cada rueda en 5 segundos?

Problema 266. En una clase, no hay dos niños que nacieron el mismo día de la semana y no hay dos niñas que nacieron en el mismo mes. Hoy, un niño nuevo o una niña nueva se unirá a esta clase, y una de estas dos condiciones dejará de ser cierta. A lo más, ¿Cuántos estudiantes (niños y niñas) había inicialmente en la clase?

Problema 267. En la figura, el centro del cuadrado superior Está encima del borde común de los cuadrados inferiores. Cada cuadrado tiene lados de longitud 1. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



Problema 268. Al interior de cada corchete de la siguiente igualdad:

2 [ ] 0 [ ] 1 [ ] 5 [ ] 2 [ ] 0 [ ] 1 [ ] 5 [ ] 2 [ ] 0 [ ] 1 [ ] 5 = 0

se deben anotar signos + o – de modo que la igualdad se cumpla. ¿Cuál es el menor número de signos + que se pueden anotar?

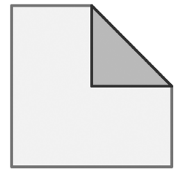
Problema 269. Durante una tormenta cayeron 15 litros de agua por metro cuadrado cayeron. ¿Cuánto aumentó el nivel del agua en una piscina al aire libre?

Problema 270. Un arbusto tiene 10 ramas. Cada rama tiene 5 hojas, o bien, tiene solo 2 hojas y 1 flor. ¿Cuál de los siguientes números podría ser el número total de hojas que tiene el arbusto?

a. 45
b. 39
c. 37
d. 31
e. Ninguna de las anteriores.

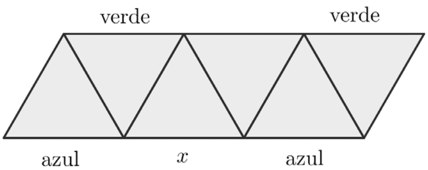
Problema 271. El puntaje promedio de los estudiantes que rindieron un examen de matemática fue de 6. Exactamente, el 60% de los alumnos aprobó el examen. El puntaje promedio de los estudiantes que aprobaron el examen fue 8. ¿Cuál es el puntaje promedio de los estudiantes que reprobaron?

Problema 272. Una de las esquinas de un cuadrado se pliega a su centro para formar un pentágono irregular. Las áreas del pentágono y del cuadrado son enteros consecutivos. ¿Cuál es el área del cuadrado?



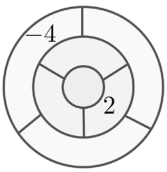
Problema 273. Raquel sumó las longitudes de tres de los lados de un rectángulo y obtuvo 44 cm. También Lidia sumó las longitudes de tres de los lados del mismo rectángulo y obtuvo 40 cm. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo?

Problema 274. El diagrama muestra una secuencia de triángulos, e indica los colores de algunos segmentos. Cada triángulo debe estar formado por tres colores distintos, rojo, azul y verde. ¿De qué color se debe pintar el segmento x?



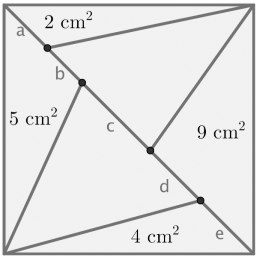
Problema 275. La profesora preguntó a cinco de sus alumnos, ¿cuántos de los cinco había realizado su tarea? Álvaro dijo que ninguno, Berta dijo que solo una, Camilo dijo exactamente dos, Daniela dijo exactamente tres y Eugenia dijo exactamente cuatro. La profesora sabía que aquellos estudiantes que no habían hecho su tarea no estaban diciendo la verdad, pero los que habían hecho su tarea estaban diciendo la verdad. ¿Cuántos de estos estudiantes habían hecho su tarea?

Problema 276. Romina quiere escribir un número en cada una de las siete regiones delimitadas en el diagrama. Dos regiones son vecinas si comparten parte de su límite. El número en cada región corresponde a la suma de los números de sus vecinos. Romina ya ha escrito los números en dos de las regiones. ¿Qué número debe que escribir en la región central?



Problema 277. Cinco enteros positivos (no necesariamente todos distintos) están escritos en cinco cartas. Pedro calcula la suma de los números en cada par de cartas. Obtiene solo tres diferentes totales, 57, 70, y 83. ¿Cuál es el mayor entero en alguna de estas cartas?

Problema 278. Un cuadrado de área 30 cm^2 está dividido en dos por una diagonal, sobre esta diagonal marcamos 4 puntos generando 5 segmentos en la diagonal, a, b, c, d, e. Luego, construimos triángulos, como se muestra en la figura. ¿Qué segmento de la diagonal es el más largo?



Problema 279. En un grupo de canguros, los dos canguros más livianos pesan el 25% del peso total del grupo. Los tres canguros más pesados pesan el 60% del peso total. ¿Cuántos canguros están en el grupo?

Problema 280. Camila puede utilizar algunos trozos de alambre de medida 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm y 7 cm para hacer un cubo de alambre con aristas de longitud 1 cm sin solapamientos. ¿Cuál es el menor número de estas piezas que puede usar?

Problema 281. En *PQRS* trapecio, los lados *PQ* y *SR* son paralelos el ángulo *PSR* = 120º y $RS = SP = \frac{1}{3}PQ$. ¿Cuál es la medida del ángulo *PQR*?

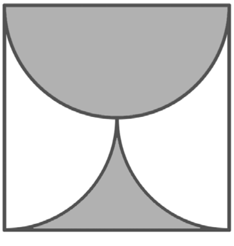
Problema 282. Cinco puntos se encuentran en una línea. Alex encuentra las distancias entre cada posible par de puntos, obteniendo las medidas 2, 5, 6, 8, 9, k, 15, 17, 20 y 22, en ese orden. ¿Cuál es el valor de k?

Problema 283. Ayer anoté el número de teléfono de Eduardo. El número de teléfono en mi nota tiene seis dígitos, pero recuerdo que Eduardo, dijo que el número tenía siete dígitos. ¿Hasta cuántos números diferentes de teléfono puedo llegar a marcar hasta lograr comunicarme con Eduardo? (Tenga en cuenta que un número de teléfono puede comenzar con cualquier dígito, incluyendo 0.)

Problema 284. María divide 2015 por 1, por 2, por 3 y así sucesivamente, hasta dividirlo por 1000. Ella escribe abajo el resto para cada división. ¿Cuál es el más grande de estos restos?

Problema 285. Una madre lavaba la ropa y colgaba camisetas en línea en un cordel para tender ropa. Luego le pidió a sus hijos que colgaran un solo calcetín entre dos camisetas. Ahora hay 29 prendas de ropa en el cordel. ¿Cuántas camisetas hay?

Problema 286. La parte sombreada del cuadrado de lado a Está delimitada por un semicírculo y dos arcos congruentes de círculo. Calcular el área sombreada.



Problema 287. Tres hermanas, Ana, Berta y Cindy compraron una bolsa de 30 galletas. Ana aportó con \$80, Berta con \$50 y Cindy con \$20 y se repartieron las galletas en partes iguales, 10 para cada una. ¿Cuántas galletas más debería haber recibido Ana si se hubiera repartido las galletas proporcionalmente al dinero que cada una aportó?

Problema 288. ¿Cuál es el último dígito del número $2015^2 + 2015^0 + 2015^1 + 2015^5$?

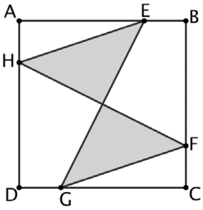
Problema 289. Hay 33 niños en una clase. Sus asignaturas favoritas son informática o educación física. Tres de los niños prefieren ambas asignaturas. El número de niños que prefieren solo la asignatura de informática es el doble de los que prefieren solo educación física. ¿Cuántos niños prefieren informática?

Problema 290. El Sr. Vela compró 100 velas. El enciende una vela cada día hasta que se quema, el Sr. Vela siempre hace una nueva vela con la cera de siete velas quemadas. ¿Durante cuántos días el Sr. Vela encenderá una vela completa (entera)?

Problema 291. Cada habitante del planeta Alero tiene al menos dos orejas. Tres habitantes nombrados Imi, Dimi y Trimi se reunieron en un cráter. Imi dijo: "Puedo ver 8 orejas". Dimi: "Veo 7 orejas". Trimi: "Puedo ver solo 5 orejas". Si ninguno de ellos podía ver a sus propias orejas. ¿Cuántas orejas tiene Trimi?

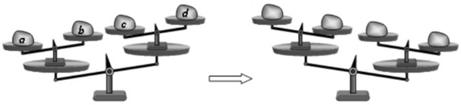
Problema 292. Un recipiente con la forma de un prisma rectangular y cuya base es un cuadrado de lado 10 cm, se llena con agua hasta una altura de h cm. Un cubo sólido de 2 cm de lado se pone en el recipiente. ¿Cuál es el mínimo valor de h cuando el cubo es completamente sumergido en el agua?

Problema 293. El cuadrado $ABCD$ tiene área 80. Los puntos E, F, G y H están en los lados del cuadrado de modo que $AE = BF = CG = DH$. Si $AE = 3EB$, cuál es el área de la figura sombreada?



Problema 294. El producto de las edades (en números enteros) de un padre y un hijo es de 2015. ¿Cuál es la diferencia de sus edades?

Problema 295. Cuatro pesos a, b, c, d se colocan en una balanza (ver la figura). Cuando dos de las cargas fueron intercambiadas, la balanza cambia su posición como se muestra en la figura. ¿Qué cargas fueron intercambiadas?



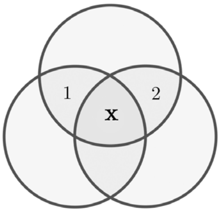
Problema 296. Si las dos raíces de la ecuación $x^2 - 85x + c = 0$ son números primos. ¿Cuál es el valor de la suma de los dígitos de c?

Problema 297. ¿Cuántos números enteros positivos de tres dígitos existen de modo que cualquiera de dos dígitos adyacentes difieran en 3 unidades?

Problema 298. ¿Cuál de los siguientes es un contraejemplo de la proposición "Si n es primo, entonces entre los números $n-2$ y $n+2$ solo uno es primo"?

a. $n = 11$ **d.** $n = 29$
b. $n = 19$ **e.** $n = 37$
c. $n = 21$

Problema 299. La figura muestra siete regiones delimitadas por tres círculos. En cada región se escribe un número. Se sabe que el número en cualquier región es igual a la suma de los números de todas sus regiones vecinas (dos regiones son vecinas si sus fronteras tienen más de un punto común). Dos de los números son conocidos (ver la figura). ¿Qué número Está escrito en la región central?



Problema 300. Juan tiene 3 diccionarios diferentes y dos novelas diferentes en un estante. ¿Cuántas maneras hay para organizar los diccionarios y las novelas si se quiere mantener los diccionarios juntos y las novelas juntas?

Problema 301. ¿Cuántos números de 2 dígitos se pueden escribir como la suma de exactamente seis diferentes potencias de 2 incluyendo 2^0?

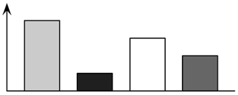
Problema 302. Andrea nació en 1997, su hermana menor Carla, en el año 2001. La diferencia de edad de las dos hermanas, en cualquier caso, es:

a. menos de 4 años
b. al menos 4 años
c. exactamente 4 años
d. más de 4 años
e. no menos de 3 años

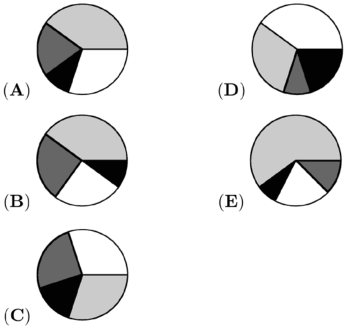
Problema 303. Reduzca la expresión:

$$(a - b)^5 + (b - a)^5$$

Problema 304. Daniela dibujó un gráfico de barras que representa la cantidad de las cuatro especies de árboles registradas durante una excursión de biología.

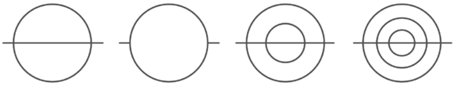


Juan piensa que un gráfico circular podría representar mejor las proporciones de las diferentes especies de ´arboles. ¿Cuál es el gráfico circular más pertinente?

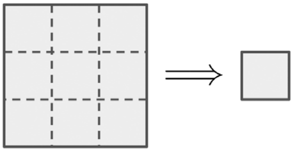


Problema 305. Qué resultado obtenemos al dividir por 31 la suma de los 31 enteros del 2001 hasta el 2031.

Problema 306. ¿Cuántas de las siguientes figuras se pueden trazar con una línea continua sin dibujar un segmento dos veces?

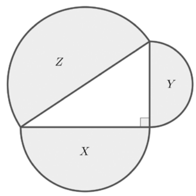


Problema 307. Un pedazo cuadrado de papel se dobla a lo largo de las líneas de puntos, una tras otra, en cualquier orden o dirección. Desde la pieza resultante se corta una esquina. Ahora el papel es desplegado. ¿Cuántos orificios hay en el papel?



Problema 308. Tres semicírculos tienen diámetros que son los lados de un triángulo rectángulo. Sus áreas son X cm², Y cm² y Z cm². ¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

a. $X + Y < Z$
b. $\sqrt{X} + \sqrt{Y} = \sqrt{Z}$
c. $X + Y = Z$
d. $X^2 + Y^2 = Z^2$
e. $X^2 + Y^2 = Z$



Problema 309. ¿Cuál de las siguientes es la lista completa del número de ángulos agudos que un cuadrilátero convexo puede tener?

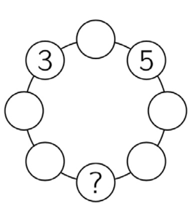
a. 0, 1, 2
b. 0, 1, 2, 3
c. 0, 1, 2, 3, 4
d. 0, 1, 3
e. 1, 2, 3

Problema 310. Calcular el valor de:

$$\sqrt{(2015+2015)+(2015-2015)+(2015\cdot 2015)+(2015\div 2015)}$$

Problema 311. Determine en cuantas regiones queda dividido el plano cartesiano al trazar el eje x y las gráficas de las funciones $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = x^2 - 1$.

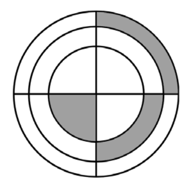
Problema 312. Elsa quiere escribir un número en cada círculo de la imagen de tal manera que cada número es la suma de sus dos vecinos. ¿Qué número debe escribir Elsa en el círculo con el signo de interrogación?



Problema 313. Dados cinco números enteros positivos distintos $a, b, c, d, e,$ sabemos que $c \div e = b$, $a+b = d$ y $e-d = a$. ¿Cuál de los números a, b, c, d, e es el más grande?

Problema 314. La media geométrica de un conjunto de n números positivos se define como la raíz n-ésima del producto de esos números. La media geométrica de un conjunto de tres números es 3 y la media geométrica de otro conjunto de tres números es 12. ¿Cuál es la media geométrica del conjunto combinado de seis números?

Problema 315. En la figura que se muestra hay tres círculos concéntricos y dos diámetros perpendiculares. Si las tres figuras sombreadas tienen igual área y el radio del círculo pequeño es uno, ¿Cuál es el producto de los tres radios?

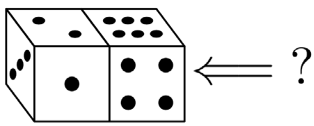


Problema 316. Un concesionario de automóviles compró dos autos. Vendió el primero obteniendo una ganancia del 40% y el segundo obteniendo una ganancia del 60%. La ganancia obtenida por los dos coches fue del 54%. ¿Cuál es la razón de los precios pagados por el primer y el segundo auto?

Problema 317. Vivi tiene un dado con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 en sus caras. Tere tiene un dado especial con los números 2, 2, 2, 5, 5, 5 en sus caras. Cuando Vivi y Tere lanzan los dados el que tiene el número más grande gana. Si los dos números son iguales es un empate. ¿Cuál es la probabilidad de que Tere gane?

Problema 318. Hay 2015 bolitas en un cajón. Las bolitas son numeradas del 1 al 2015. Se suman los dígitos de los números escritos en cada bolita. Las bolitas en que esta suma sea la misma se pintan del mismo color y bolitas con sumas diferentes, tienen diferentes colores. ¿Cuántos colores diferentes de bolitas hay en el cajón?

Problema 319. Para los dados estándar la suma de los números en las caras opuestas es 7. Hay dos dados idénticos como se muestran en la figura. ¿Qué número puede estar en el lado no visible?



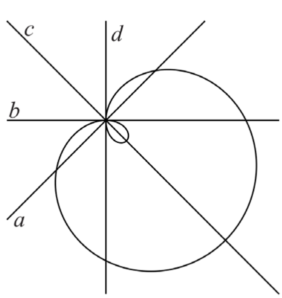
Problema 320. La siguiente es la tabla de multiplicar de los números del 1 al 10. ¿Cuál es la suma de los 100 productos presentes en la tabla?

$\times$	1	2	3	…	10
1	1	2	3	…	10
2	2	4	6	…	20
…	…				…
10	10	20	30	…	100

Problema 321. La curva en la figura está descrita por la ecuación:

$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 2(x^2 + y^2)$$

¿Cuál de las líneas a, b, c, d representa el eje y?



Problema 322. Al leer las siguientes cinco declaraciones de izquierda a derecha. ¿Cuál es la primera declaración verdadera?

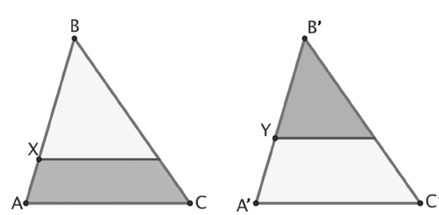
a. (c) es verdadero. **d.** (b) es falsa.
b. (a) es verdadera. **e.** $1 + 1 = 2$
c. (e) es falsa.

Problema 323. ¿Cuántos polígonos regulares existen tal que sus ángulos (en grados) son números enteros?

Problema 324. ¿Cuántos números enteros de 3 dígitos positivos pueden ser representados como la suma de exactamente nueve potencias diferentes de 2?

Problema 325. Dados los triángulos ABC y $A'B'C'$ congruentes, se traza un segmento paralelo a la base AC que pasa por X y un segmento paralelo a la base $A'C'$ que pasa por Y. Si las áreas de las regiones sombreadas son las mismas y los segmentos BX y XA están en la razón $4 : 1$. ¿En qué razón están los segmentos $B'Y$ y YA'?

Problema 326. En un triángulo rectángulo, la bisectriz de un ángulo agudo divide el lado opuesto en segmentos de longitud 1 y 2. ¿Cuál es la longitud de la bisectriz?



Problema 327. Determine de cuántas maneras se pueden elegir los dígitos a, b, c tal que $\overline{ab} < \overline{bc} < \overline{ca}$, donde $\overline{xy}$ representa un número de decena x y unidad y.

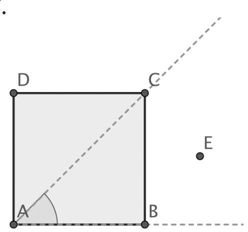
Problema 328. Cuando uno de los números $1, 2, 3, ..., n-1, n$ fue eliminado, la media de los números restantes fue 4,75. ¿Qué número fue eliminado?

Problema 329. Se escriben diez números distintos en una pizarra. Cualquier número que sea igual al producto de los otros nueve números, se subraya. ¿Cuántos números se pueden subrayar como máximo?

Problema 330. Varios puntos se marcan en una línea, y se trazan todos los segmentos posibles entre parejas de estos puntos. Uno de los puntos se encuentra en 80 de estos segmentos (no como extremo); otro punto se encuentra en 90 de estos segmentos (no como extremo). ¿Cuántos puntos fueron marcados en la línea?

Problema 331. ¿Cuántos números de dos dígitos *xy* existen tal que al sumarle el número de dos dígitos *yx* se obtiene un múltiplo de 7?

Problema 332. Dado un cuadrado *ABCD* y un punto *E* al interior del ángulo *CAB*, se tiene que $AE = BD$ y que *BE* es perpendicular a *BD*. Determina la medida del ángulo *BAE*.



Problema 333. Dado un cuadrilátero *ABCD* con $\angle ABC = \angle ADC = 90^{o}$, $AB = BC$ y $AD + DC = 20$: Calcule su área.

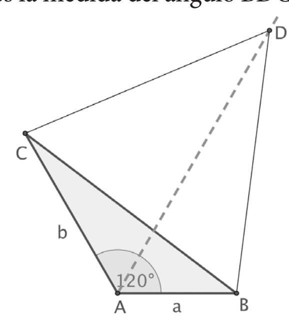
Problema 334. De los números naturales del 1 al 9 uno de ellos es borrado. De los 8 que quedan, 2 se multiplican y los restantes 6 se suman, resultando el producto igual a la suma. ¿De Cuántas maneras se puede elegir el número que se borra al inicio?

Problema 335. ¿Cuantos prismas rectos con dimensiones enteras x, y, z ($x \leq y \leq z$) existen, tal que el área total es el doble de su volumen, ignorando la unidad de medida?

Problema 336. En un cuadrilátero convexo, 3 de sus lados y la diagonal miden 5 unidades. ¿Cuántos valores enteros puede tomar el cuarto lado?

Problema 337. 51 cuervos se sientan en fila en la rama de un árbol. Cuando un cuervo grazna su vecino de la derecha y su vecino de la izquierda salen volando. Cualquier cuervo que vuela regresa en 1 minuto a su lugar anterior y grazna de inmediato. Si el cuervo del extremo izquierdo de la rama es el primero que grazna. ¿Cuántas veces graznó el cuervo del extremo derecho durante los primeros 60 minutos?

Problema 338. En un Triángulo *ABC*, donde $\angle BAC = 120^{o}$, el punto *D* Está ubicado en la bisectriz de $\angle BAC$, tal que $AD = AB + AC$. ¿Cuál es la medida del ángulo *BDC*?



Problema 339. Cuatro personas *A*, *B*, *C*, *D* participan en una carrera. Después de la carrera se afirmó lo siguiente: *A* llegó primero, *B* llegó último, *C* no llegó último y *D* no llegó ni primero ni último. Si exactamente una de estas afirmaciones es falsa. ¿Quién llegó primero en la carrera?

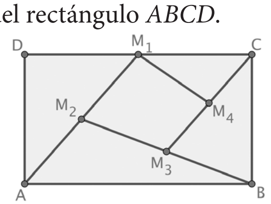
Problema 340. Mi mamá plantó cinco claveles de cinco colores distintos en cinco maceteros de la terraza, y los dejó en el siguiente orden de izquierda a derecha: rojo, morado, blanco, amarillo y naranjo. Aparentemente, alguien desordenó los maceteros, pues a la izquierda floreció el clavel blanco y en el centro Está comenzando a florecer el clavel naranjo. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un clavel florezca en el lugar donde fue plantado?

Problema 341. Dos amigos trotan a una velocidad constante y en línea recta entre los puntos A y B. Ellos comenzaron a trotar al mismo tiempo, uno desde A hasta B y el otro desde B hasta A. Ellos se cruzan por primera vez a 500 metros de distancia de A. Cuando uno de ellos llega al otro extremo, inmediatamente regresa trotando hacia su punto de partida, encontrándose por segunda vez a 250 metros de B. ¿Cuántos metros de distancia hay entre A y B?

Problema 342. Un peón está en un tablero de ajedrez ilimitado en todas sus direcciones. En cada paso se mueve a una celda adyacente (no se mueve en diagonal). ¿Cuál es la probabilidad de que el peón después de 4 pasos realizados al azar caiga de nuevo en la celda inicial?

Problema 343. 51 cuervos se sientan en fila en la rama de un árbol. Cuando un cuervo grazna su vecino de la derecha y su vecino de la izquierda salen volando. Cualquier cuervo que vuela regresa en 1 minuto a su lugar anterior y grazna de inmediato. Si el cuervo del extremo izquierdo de la rama graznó primero. ¿Cuántas veces en total los cuervos graznaron durante la hora transcurrida después de que graznó el cuervo del extremo izquierdo?

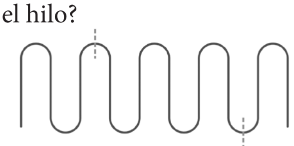
Problema 344. En el rectángulo $ABCD$ que se muestra en la figura, M_1 es el punto medio de DC, M_2 es el punto medio de AM_1, M_3 es el punto medio de BM_2 y M_4 es el punto medio de CM_3. Encontrar la razón entre el área del cuadrilátero $M_1M_2M_3M_4$ y el área del rectángulo $ABCD$.



Problema 345. 96 miembros de un club están de pie en un círculo grande. Empiezan diciendo los números 1, 2, 3, etc., y a la vez, van dando vueltas al círculo. Cada miembro que dice un número par se sale del círculo y el resto continúa. Siguen de este modo hasta que queda solo uno de los miembros. ¿Qué número dijo a este miembro en la primera ronda?

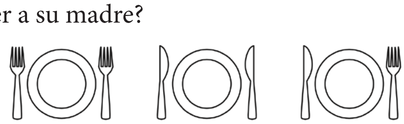
Problema 346. Miguel corta una pizza en cuatro partes iguales. Luego corta cada una de ellas en tres partes iguales. ¿Qué fracción de la pizza es cada una de los trozos que ha obtenido?

Problema 347. Un hilo de longitud 10 cm se dobla en partes iguales como se muestra en la figura. El hilo se corta en los dos puntos marcados. ¿Cuáles son las longitudes de las tres partes en que ha quedado dividido el hilo?



Problema 348. En el refrigerador de Luisa hay colocados 8 imanes (representados en la figura por círculos negros) sujetando varias tarjetas. ¿Cuál es el mayor número de imanes que puede quitar de manera que ninguna tarjeta caiga al suelo?

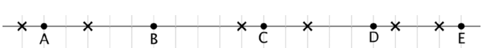
Problema 349. La madre de Alicia quiere ver un cuchillo a la derecha y un tenedor a la izquierda de cada plato. ¿Cuántos intercambios de cuchillo y tenedor, como mínimo, tendrá que hacer Alicia para complacer a su madre?



Problema 350. Un ciempiés tiene 100 pies pero solo 25 pares de zapatos. Si el necesita un zapato para cada uno de sus pies. ¿Cuántos zapatos más necesita comprar?

Problema 351. María, Ana y Natalia trabajan en una guardería infantil. La guardería atiende de Lunes a Viernes, y siempre hay exactamente dos de ellas trabajando. María trabaja tres días a la semana y Ana, cuatro días a la semana. ¿Cuántos días a la semana trabaja Natalia?

Problema 352. Cinco ardillas, A, B, C, D y E están situadas en los puntos marcados en la recta de la figura. En los puntos marcados con × hay 6 nueces (una nuez en cada ×). En un momento determinado las ardillas corren hacia la nuez más próxima, todas a la misma velocidad. En cuanto una ardilla atrapa una nuez, sigue corriendo hacia la más cercana. ¿Qué ardilla atrapará dos nueces?



Problema 353. En una clase hay 30 estudiantes que siempre se sientan en parejas, de manera que cada hombre está sentado con una mujer, y exactamente la mitad de las mujeres están sentadas junto a un hombre. ¿Cuántos hombres hay en esa clase?

Problema 354. Se escribe el número 2581953764 en una tira de papel. Juan hace dos cortes en la tira, obteniendo tres números. A continuación, Juan suma esos tres números. ¿Cuál es el menor valor posible que puede tener esa suma?

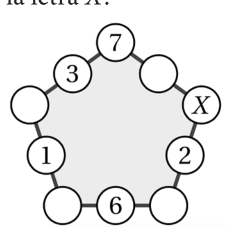
Problema 355. La abuela compra suficiente comida para alimentar a sus cuatro gatos durante 12 días. En su camino a casa, encuentra dos gatos abandonados y se los lleva también a casa. Si le da a cada gato la misma cantidad diaria de alimento, ¿para cuántos días tendrá comida?

Problema 356. Cada letra de la palabra *BENJAMIN* representa una de las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6 o 7. Letras distintas representan cifras distintas. El número *BENJAMIN* es impar y divisible por 3. ¿Qué cifra le corresponde a la N?

Problema 357. Ricardo escribe todos los números que tienen las siguientes propiedades: la primera cifra (por la izquierda) es un 1; cada una de las cifras siguientes es mayor o igual que la que le precede; y la suma de las cifras del número es 5. ¿Cuántos números ha escrito?

Problema 358. Luis Está montando un pequeño restaurante. Su amigo Gastón le ha dado varias mesas cuadradas y varias sillas. Si usa cada mesa con 4 sillas, necesitaría 6 sillas más. Si uniera las mesas de dos en dos, poniendo 6 sillas en cada una, le sobrarían 4 sillas. ¿Cuántas mesas le dio Gastón?

Problema 359. Sebastián escribe números en cinco de los círculos de la figura. Y quiere escribir números en los otros 5 de tal manera que las sumas de los 3 números que hay en cada lado del pentágono sean iguales. ¿Qué número debe escribir en el círculo de la letra X?



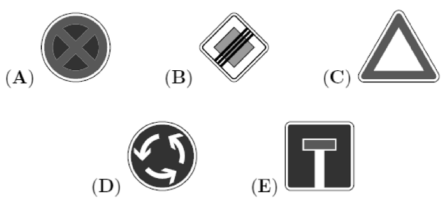
Problema 360. Un canguro está jugando con su calculadora. Empieza en el número 12. Lo multiplica o divide por 2 o por 3 (si es posible) 60 veces. ¿Cuál de los siguientes números NO puede ser obtenido?

a. 12
b. 18
c. 36
d. 72
e. 108

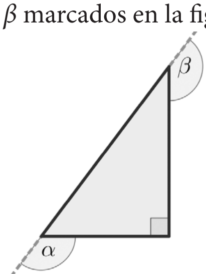
Problema 361. Dados 6 dígitos distintos y no nulos, se forman dos números de tres dígitos ocupando los 6 números. El primer dígito del segundo número es el doble del último dígito del primer número. ¿Cuál es el menor valor posible de la suma de los dos números?

Problema 362. ¿Cuántos números enteros hay entre 3,17 y 20,16?

Problema 363. Cuál de las siguientes señales de tránsito tiene el mayor número de ejes de simetría?

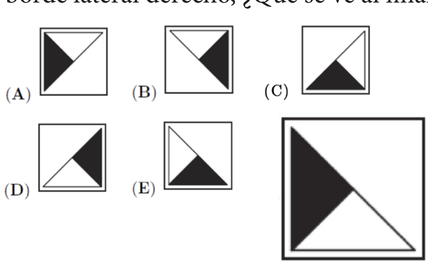


Problema 364. ¿Cuánto vale la suma de los ángulos α y β marcados en la figura?



Problema 365. Lorena tiene que sumar 26 a un cierto número. En vez de eso, le resta 26 y obtiene -14. ¿Qué número debería haber obtenido si lo hubiera hecho bien?

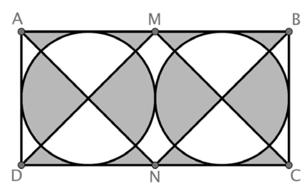
Problema 366. Juana voltea una carta por su borde inferior y luego repite esto por el borde lateral derecho, ¿Qué se ve al final?



Problema 367. Un Canguro reúne 555 grupos de 9 piedras cada uno en un único montón. A continuación, divide el montón resultante en montoncitos de 5 piedras cada uno. ¿Cuántos montoncitos obtiene?

Problema 368. En el periódico de la escuela se publicó que el 60% de los profesores vienen a la escuela en bicicleta. Esos son 45 profesores. Solo el 12% de nuestros profesores vienen en automóvil. Ese número es:

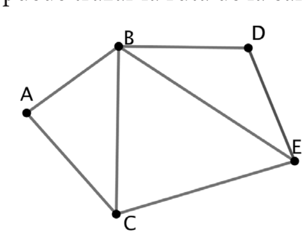
Problema 369. El rectángulo *ABCD* de la figura tiene un área de 10 cm^2, se dibujan dos circunferencias congruentes tangentes entre sí y tangentes a los lados del rectángulo. Si *M* y *N* son puntos medios de *AB* y *DC* respectivamente. Calcule el área achurada.



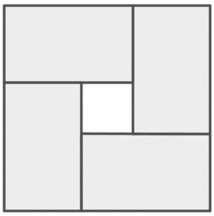
Problema 370. Dos trozos de cuerda miden 1m y 2m de longitud. Se cortan los dos trozos en varias partes, todas de la misma longitud. ¿Cuál de los siguientes NO puede ser el número total de partes que se obtienen?

a. 6 **d.** 12
b. 8 **e.** 15
c. 9

Problema 371. Cuatro ciudades, *A*, *B*, *C* y *D* están conectadas por carreteras, como se muestra en la figura. Pedro debe organizar la carrera de modo que comience en *A* y tenga la meta en *E*. ¿De Cuántas formas Pedro puede trazar la ruta de la carrera?



Problema 372. La figura muestra cuatro rectángulos iguales situados dentro de un cuadrado. El perímetro de cada rectángulo es 16 cm. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado?



Problema 373. Mauricio tiene 49 bolas azules y 1 roja. ¿Cuántas bolas debe retirar para que el 90% de sus bolas sean azules?

Problema 374. ¿Cuál de las siguientes fracciones tiene el valor más próximo a $\frac{1}{2}$?

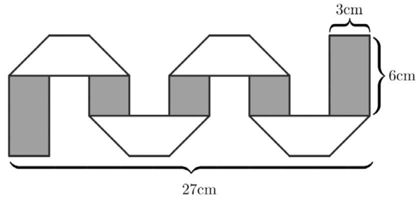
a. $\frac{25}{79}$ **d.** $\frac{52}{79}$
b. $\frac{27}{59}$ **e.** $\frac{57}{92}$
c. $\frac{29}{57}$

Problema 375. Se escriben los resultados de los cuartos de final, las semifinales y la final de un torneo en el que no hay empates. Los resultados son (no necesariamente en este orden): *B* gana a *A*, *C* gana a *D*, *G* gana a *H*, *G* gana a *C*, *C* gana a *B*, *E* gana a *F* y *G* gana a *E*. ¿Qué pareja jugó la final?

Problema 376. José, Juan y Jorge son trillizos. Sus hermanos Tomás y Tito son gemelos y son 3 años más jóvenes. ¿Cuál de los siguientes números puede ser la suma de las edades de los 5 hermanos?

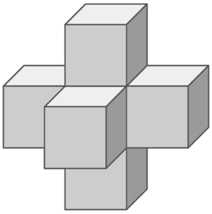
a. 36 **d.** 89
b. 53 **e.** 92
c. 76

Problema 377. Una tira de papel, de 3 cm de ancho, es gris de un lado y blanca del otro. Se dobla la tira, como se muestra en la figura. Si los trapecios blancos son congruentes, los rectángulos grises son congruentes y los cuadrados grises son congruentes. Si la figura solo muestra la tira doblada, con las medidas parciales indicadas. ¿Cuál es la longitud de la tira original?



Problema 378. Los canguros Eduardo y Joan empiezan a saltar al mismo tiempo, desde el mismo punto, y en la misma dirección. Dan un salto por segundo. Cada uno de los saltos de Eduardo es de 6 m de largo. El primer salto de Joan es de 1 metro de largo, el segundo 2 metros, el tercero 3 metros y así sucesivamente. ¿Después de cuántos saltos Joan alcanzará a Eduardo?

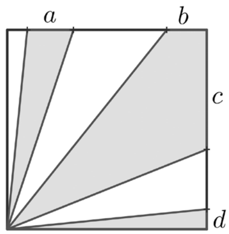
Problema 379. Siete dados se pegan juntos para formar el sólido de la figura. Las caras de los dados que se pegan juntas tienen el mismo número de puntos en ellas. ¿Cuántos puntos hay, en total, en la superficie del sólido?



Problema 380. En una clase hay 30 estudiantes. Se sientan de dos en dos de modo que cada hombre está sentado con una mujer, y exactamente la mitad de las mujeres están sentadas junto a un hombre. ¿Cuántos hombres hay en esa clase?

Problema 381. En una clase hay 20 estudiantes. Se sientan de dos en dos de modo que exactamente un tercio de los hombres se sienta junto a una mujer, y exactamente la mitad de las mujeres se sienta junto a un hombre. ¿Cuántos hombres hay en la clase?

Problema 382. Dentro de un cuadrado de área 36 cm^2 hay regiones sombreadas como se muestra en la figura. El área sombreada total es 27. ¿Cuánto vale $a + b + c + d$?



Problema 383. El reloj de Tamara va 10 minutos atrasado, pero ella cree que va 5 minutos adelantado. El reloj de Luisa va 5 minutos adelantado, pero ella cree que va 10 minutos atrasado. En el mismo momento, cada una de ellas mira su propio reloj. Tamara cree que son las 12:00. ¿Qué hora cree Luisa que es?

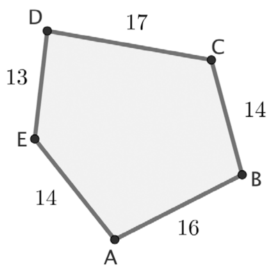
Problema 384. Doce chicas se reúnen en un café. Como promedio se come cada una 1,5 dulces. Ninguna de ellas come más de dos dulces y dos de ellas solo beben agua mineral. ¿Cuántas chicas comieron 2 dulces?

Problema 385. Caperucita Roja lleva pasteles a tres abuelitas. Lleva una cesta llena de pasteles. Inmediatamente antes de entrar en cada una de las casas de las abuelitas, el Lobo Feroz se come la mitad de los pasteles que hay en la cesta en ese momento. Cuando sale de la casa de la tercera abuelita ya no quedan pasteles en la cesta. Le da el mismo número de pasteles a cada abuelita. ¿Cuál de los siguientes números es seguro que divide al número inicial de pasteles que había en la cesta?

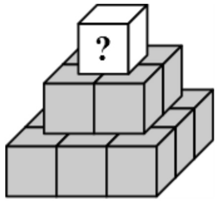
a. 4
b. 5
c. 6
d. 7
e. 9

Problema 386. Se escriben en una pizarra varios enteros positivos distintos. El producto de los dos menores es 16 y el producto de los dos mayores es 225. ¿Cuál es la suma de todos los enteros?

Problema 387. La figura muestra un pentágono. Se dibujan cinco círculos con centros en A, B, C, D y E de tal manera que los dos círculos vecinos son tangentes entre sí. Las longitudes de los lados del pentágono se dan en la figura. ¿Qué punto es el centro del mayor de los círculos dibujados?



Problema 388. Se escribe un entero positivo distinto en cada uno de los 14 cubos de la pirámide mostrada en la figura. La suma de los 9 enteros escritos en el piso más bajo es igual a 50. El entero escrito en cada uno de los demás cubos es igual a la suma de los enteros escritos en los 4 cubos que están debajo de él. ¿Cuál es el mayor entero posible que se puede escribir en el cubo superior?



Problema 389. Un tren tiene cinco vagones, en cada uno de los cuales hay por lo menos un pasajero. Se dice que dos pasajeros son próximos si están en el mismo vagón o en vagones contiguos. Cada pasajero tiene o bien 5 o bien 10 pasajeros próximos. ¿Cuántos pasajeros hay en el tren?

Problema 390. ¿Cuál de los siguientes números es el más próximo al resultado de la operación $\frac{17 \cdot 0{,}3 \cdot 20{,}16}{999}$?

a. 0,01 **d.** 10
b. 0,1 **e.** 100
c. 1

Problema 391. Un test consta de 30 preguntas (las posibles respuestas son "verdadero" o "falso"). Vania tiene un 50% más de respuestas correctas que incorrectas. Si Vania contestó todas las preguntas, ¿cuántas respuestas correctas tiene?

Problema 392. Si el entero positivo x se divide por 6, el resto es 3. ¿Cuál será el resto de dividir $3x$ por 6?

Problema 393. ¿Cuántas semanas son 2016 horas?

Problema 394. Cuando era pequeño, Esteban inventó su propio sistema para escribir números negativos antes de aprender el método usual. Contando hacia atrás, escribía:

$$\ldots, 3, 2, 1, 0, 00, 000, 0000, \ldots$$

¿Cuál es el resultado de 000 + 0000 en esta notación?

Problema 395. Nicolás tiene un dado, las caras muestran los números del 1 al 6, pero él quiere un dado original por lo que ha decidido dejar negativos los números impares (–1,–3,–5 en vez de 1, 3, 5). Nicolás lanza dos veces el dado y suma los valores obtenidos. ¿Cuál de los siguientes totales no puede ser obtenido?

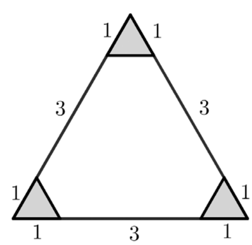
a. 3 **d.** 7
b. 4 **e.** 8
c. 5

Problema 396. Víctor escribe cinco enteros positivos (distintos) de una sola cifra. Observa que la suma de ninguna pareja de esos números es 10. ¿Cuál de los siguientes números es seguro que Víctor escribió?

a. 1 **d.** 4
b. 2 **e.** 5
c. 3

Problema 397. En un torneo eliminatorio de tenis, seis de los resultados de los cuartos de final, las semifinales y la final fueron (no necesariamente en ese orden): B gana a A, C gana a D, G gana a H, G gana a C, C gana a B y E gana a F. ¿Qué resultado falta?

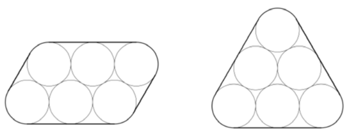
Problema 398. ¿Qué porcentaje del área del triángulo Está sombreada en la figura?



Problema 399. Ana Está haciendo un cuadrado mágico multiplicativo utilizando los números 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 y 100. Los productos de los números situados en cada fila, en cada columna y en las dos diagonales deben ser todos iguales. Si Ana ha comenzado como se ve en la figura. ¿Qué número debe poner en la casilla marcada con x?

20	1	
		x

Problema 400. Se desea embalar seis tubos circulares de diámetro 2 cm cada uno por medio de una banda. Las dos opciones posibles se muestran en la figura. ¿Cuál crees tú que es más económica (ocupa menos huincha)? Justifica.



Problema 401. Ocho sobres sin marca alguna en el exterior contienen los números 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128. Eva elige unos cuantos sobres al azar, y su compañera Alicia toma los que quedan. Ambas suman los números que hay dentro de los sobres. La suma de Eva es 31 unidades más que la de Alicia. ¿Cuántos sobres tomó Eva?

Problema 402. Tenemos 2016 canguros, cada uno de los cuales puede ser gris o rojo, y al menos hay uno de cada color. Para cada canguro *K* calculamos el cociente del número de canguros del otro color dividido por el número de canguros del mismo color que *K* (incluido *K*). Hallar la suma de las fracciones así calculadas, para los 2016 canguros.

Problema 403. Una planta se enrolla 5 veces alrededor de un tubo de 1 m de altura y 15 cm de circunferencia, como se muestra en la figura. Cuando sube, la altura se incrementa en una proporción constante. ¿Cuál es la longitud de la planta si la desenrollamos?

Problema 404. ¿Cuál es el mayor resto posible que puede obtenerse al dividir un número de dos cifras por la suma de sus cifras?

Problema 405. Un barco a motor tarda 4 horas en navegar, corriente abajo, desde *A* hasta *B*. El retorno, contra corriente, desde *B* hasta *A*, le lleva 6 horas. Suponiendo que el tronco de madera no encuentra ningún obstáculo en su camino y es llevado solo por la corriente ¿Cuántas horas tardaría este en llegar desde *A* a *B*?

Problema 406. En Cangurolandia cada mes tiene 40 días, numerados del 1 al 40. Los días cuyo número es divisible por 6 son vacaciones, así como los días cuyo número es primo. ¿Cuántas veces en un mes habrá un solo día de trabajo entre dos de vacaciones?

Problema 407. Dos de las alturas de un triángulo miden 10 y 11 cm, respectivamente. ¿Cuál es el mínimo valor entero que puede tomar la medida de la tercera altura?

Problema 408. Joel escribe cuatro enteros positivos consecutivos. A continuación calcula los cuatro totales posibles sumando tres de los enteros. Si ninguno de esos totales es un número primo. ¿Cuál es el menor entero que pudo escribir Joel?

Problema 409. Cuatro deportistas están sentados alrededor de una mesa redonda. Los deportes que practican son: fútbol, básquetbol, atletismo y natación. Quien juega futbol se sienta a la izquierda de Andrea. Quien practica básquetbol Está sentado frente a Vicente. Eva y Felipe están sentados juntos. La persona sentada a la izquierda de quien practica atletismo es una mujer. ¿Qué deporte practica Eva?

Problema 410. Se puede escribir las fechas en la forma *DD/MM/AAAA*. Por ejemplo, el 18 de septiembre de 2016 se escribe 18/09/2016. Llamaremos sorprendente a una fecha si los 8 números escritos de esta manera son diferentes. ¿Cuándo será la fecha sorprendente más próxima?

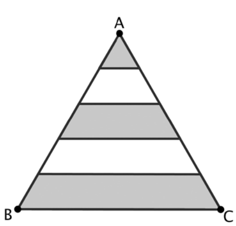
Problema 411. En una conferencia, los 2016 participantes están registrados como $P_1, P_2, P_3, ..., P_{2016}$. Cada participante desde P_1 hasta P_{2015} estrecha la mano de un número de participantes igual a su propio número de registro. ¿Cuántas manos estrechó el participante P_{2016}?

Problema 412. Dado un número de tres dígitos xyz, la suma de sus dígitos es 26. Determine el producto de sus dígitos.

Problema 413. Tenemos cajas numeradas desde 1 hasta k y bolas numerada desde el 1 hasta 2016. En la caja 1 se guarda la bola 1, en la caja 2 las siguientes dos bolas (bola 2 y bola 3) en la caja 3 las siguientes 3 bolas (bola 4, bola 5 y bola 6) y así sucesivamente, en ese orden. Si la bola 2016 se guardó en la caja k. ¿Cuál es el valor de k?

Problema 414. Si se suman los dígitos del número xyx (de tres dígitos), el resultado es el número de dos dígitos yz. Si se suman los dígitos de este número, se obtiene el número y de un dígito. Encuentre la cifra x.

Problema 415. En el triángulo ABC de la figura se han trazado 4 rectas paralelas a la base del triángulo a igual distancia una de otra. Si el triángulo ABC tiene área 10 cm². Determine el área sombreada.



Problema 416. Los 4 nietos del abuelo Anacleto que son menores de 10 años, tienen edades distintas. El abuelo calcula el producto de sus edades y obtiene 2016. ¿Cuál es la edad de cada nieto?

Problema 417. En la representación decimal del número $\frac{391}{37}$. ¿Cuál es la cifra decimal que ocupa el lugar 37º (después de la coma)?

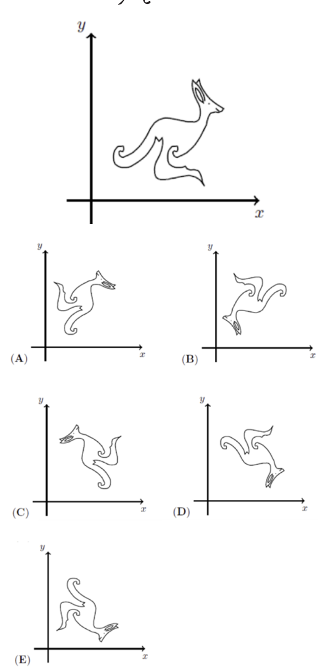
Problema 418. La suma de las edades de Tomás y Juan es 23, la suma de las edades de Juan y Alex es 24 y la suma de las edades de Tomás y Alex es 25. ¿Cuál es la edad del mayor de los tres?

Problema 419. Calcule la suma $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$

Problema 420. La media de 4 números es 9. ¿Cuál es el cuarto número si los otros tres son 5, 9 y 12?

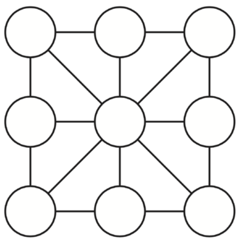
Problema 421. ¿Cuántos números enteros son mayores que 2015×2017 pero menores que 2016×2016?

Problema 422. Un conjunto de puntos del plano xy forma la figura de un canguro como se muestra en la imagen, de modo que para cada punto, se intercambian las coordenadas x e y. ¿Cuál es el resultado?

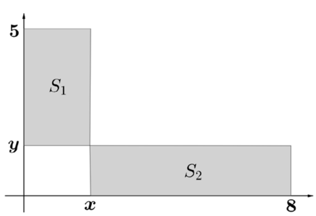


Problema 423. ¿Cuál es el menor número de planos necesarios para limitar una región acotada en el espacio tridimensional?

Problema 424. Diana quiere escribir nueve números enteros en los círculos de la figura de manera que, para los ocho triángulos cuyos vértices se unen por segmentos, las sumas de los números en sus vértices sean iguales. ¿Cuál es el mayor número de enteros distintos que puede usar?

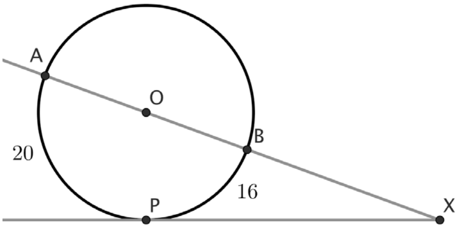


Problema 425. Los rectángulos S_1 y S_2 de la figura tienen la misma área. Determinar el valor de la razón $\frac{x}{y}$.



Problema 426. Si $x^2 - 4x + 2 = 0$. Calcule el valor de $x + \frac{2}{x}$.

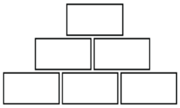
Problema 427. Las longitudes de los arcos AP y PB de la figura son 20 y 16, respectivamente. ¿Cuál es la medida en grados del ángulo $\angle AXP$?



Problema 428. a, b, c y d son enteros positivos tales que $a + 2 = b - 2 = 2c = \frac{d}{2}$. ¿Cuál es el mayor de los números a, b, c y d?

Problema 429. En esta pirámide de números cada bloque superior es el producto de los dos bloques que tiene debajo. Si los tres números de la fila inferior son números naturales mayores que 1, ¿cuál de los siguientes números no puede aparecer en el bloque superior?

a. 56 **d.** 105
b. 84 **e.** 220
c. 90



Problema 430. ¿Cuánto vale x_4, si $x_1 = 2$ y $x_{n+1} = x_n^{x_n}$ para n mayor o igual que 1?

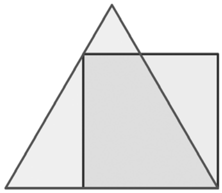
Problema 431. En el rectángulo $ABCD$ la longitud del lado AB es la mitad de la longitud de la diagonal AC. Sea M un punto de BC, tal que $AM = MC$. Determine la medida en grados del ángulo $\angle CAM$.

Problema 432. Diana corta un rectángulo de área 2016 en 56 cuadrados iguales. Las longitudes de los lados del rectángulo y de los cuadrados son enteros. ¿Para cuántos rectángulos diferentes es posible hacer esto?

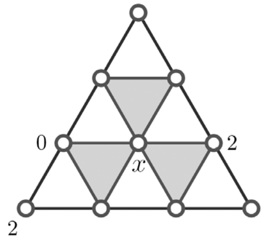
Problema 433. Cada uno de los habitantes de la Isla de los caballeros y escuderos es caballero (que siempre dice la verdad) o escudero (que siempre miente). Durante un viaje a la isla, encuentras a 7 personas en torno a una fogata. Los siete te dicen: "Estoy sentado entre dos escuderos". ¿Cuántos escuderos hay en el grupo?

Problema 434. Las ecuaciones $x^2 + ax + b = 0$ y $x^2 + bx + a = 0$ tienen raíces reales. Se sabe que la suma de los cuadrados de las raíces de la primera ecuación es igual a la suma de los cuadrados de las raíces de la segunda. Si $a \neq b$. ¿Cuál es el valor de $a + b$?

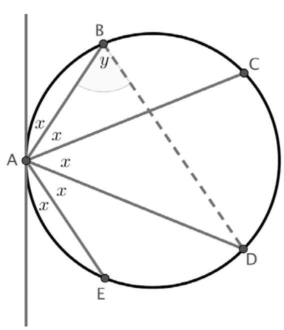
Problema 435. Si el perímetro del cuadrado de la figura es 4. Determine el perímetro del triángulo equilátero.



Problema 436. Cada uno de los diez puntos de la figura está marcado con uno de los tres números 0, 1 ´o 2. Se sabe que la suma de los números en los vértices de cualquier triángulo blanco es divisible por 3, mientras que la suma de los números en los vértices de cualquier triángulo negro NO es divisible por 3. En la figura hay marcados tres puntos. ¿Qué números se pueden usar para marcar el punto central?



Problema 437. Beatriz dibuja cinco puntos *A, B, C, D* y *E* en una circunferencia y también la tangente a la circunferencia en *A*, como se muestra en la figura, de tal manera que los cinco ángulos marcados con *x* son iguales (el dibujo no está a escala). ¿Cuál es la medida, en grados, del ángulo $\angle ABD$?

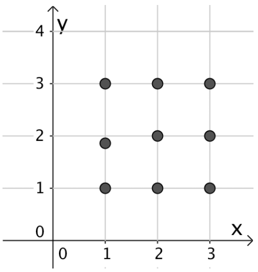


Problema 438. Determine Cuántas soluciones distintas tiene la ecuación:

$$(x^2 - 4x + 5)^{x^2+x-30} = 1$$

Problema 439. Un cuadrilátero convexo tiene un círculo inscrito (esto es, un círculo tangente a los cuatro lados del cuadrilátero). La razón del perímetro del cuadrilátero al del círculo es 4 : 3. Determine la razón del área del cuadrilátero a la del círculo.

Problema 440. ¿Cuántas funciones cuadráticas en x tienen una gráfica que pasa al menos por tres de los puntos marcados en la figura?



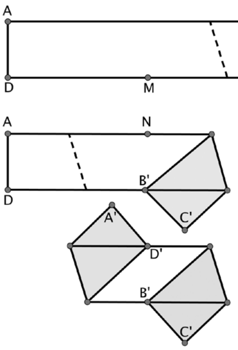
Problema 441. En un triángulo *ABC*, rectángulo en *A*, las bisectrices de los ángulos agudos se cortan en un punto *P*. Si la distancia de *P* a la hipotenusa es $\sqrt{8}$. ¿Cuál es la distancia desde *P* al vértice *A*?

Problema 442. Con las cifras de 1 a 9 (usando cada cifra exactamente una vez) se forman tres números de tres cifras. ¿Cuál de los siguientes NO puede ser la suma de esos tres números?

a. 1500 **d.** 1521
b. 1503 **e.** 1575
c. 1512

Problema 443. Un cubo se descompone en 6 pirámides de base cuadrada, uniendo un punto interior con cada uno de los vértices del cubo. Los volúmenes de cinco de esas pirámides son 2, 5, 10, 11 y 14. ¿Cuál es el volumen de la sexta pirámide?

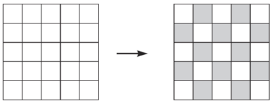
Problema 444. La tira rectangular $ABCD$ de 5 cm de ancho y 50 cm de largo es gris por un lado y blanca por otro. Doblando la tira, Cristina hace coincidir el vértice B con el punto medio M del lado CD. Doblándola otra vez, el vértice D coincide con el punto medio N del lado AB. ¿Cuál es el área, en cm^2, de la parte visible blanca de la última figura?



Problema 445. Ana elige un entero positivo n y escribe la suma de todos los enteros positivos desde 1 hasta n. Un número primo p divide a la suma, pero no divide a ninguno de los sumandos. ¿Cuál de los siguientes números puede ser $n + p$?

a. 217 **d.** 245
b. 221 **e.** 269
c. 229

Problema 446. Se considera un cuadrado de 5×5 dividido en 25 casillas. Inicialmente todas las casillas son blancas, como se muestra en la figura. Se llamarán casillas vecinas aquellas que comparten un lado. Cuando la pieza mágica de triminó del abuelo Anacleto se ubica sobre tres casillas consecutivas, misteriosamente estas casillas cambian sus colores al color opuesto (las blancas se hacen negras y las negras se hacen blancas). ¿Cuál es el número mínimo de veces que se debe poner esta pieza para obtener el ajedrezado aspecto de la figura de la derecha?



Problema 447. El entero positivo N tiene exactamente seis divisores positivos distintos, incluyendo a 1 y a N. El producto de cinco de ellos es 648. ¿Cuál es el sexto divisor de N?

Problema 448. Si a, b, c, d son reales positivos y cumplen que:

$$a + 5 = b^2 - 1 = c^2 + 3 = d - 4$$

¿Cuál de los cuatro números a, b, c, d es el mayor?

Problema 449. En una granja de Temuco, cada vaca tiene dos patas más que cada pato. Si contamos el total de patas de todas las vacas de la granja, habrán 2 patas menos que el total de patas de los patos. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a. La granja tiene menos de la mitad de vacas que de patos.
b. La granja tiene la mitad de vacas que de patos.
c. La granja tiene el mismo número de vacas que de patos.
d. La granja tiene el doble de vacas que de patos.
e. La granja tiene más del doble de vacas que de patos.

Problema 450. En una competencia deportiva hay n equipos enumerados desde 1 a n, tal que cada equipo juega sola una vez con los equipos restantes. El equipo que gana obtiene 1 punto, mientras que el equipo que pierde obtiene −1 punto. En caso de empate, ambos obtienen 0 puntos. Si el puntaje final del equipo k es $(10-2k)$ puntos, donde $k = 1, 2, \dots, n$. ¿Cuál es el número de equipos que participaron en la competencia deportiva?

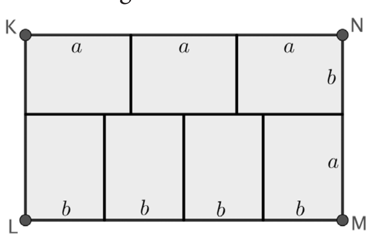
Problema 451. ¿De cuántas maneras es posible formar un segmento de 100 cm de longitud empleando segmentos de 7 y 12 cm?

Problema 452. Determine entre que números enteros se encuentra el número:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{2013 \cdot 2015}$$

Problema 453. Determina una secuencia a_1, a_2, a_3 ..., con la siguiente propiedad: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, donde a_n es un entero positivo para todo n. Si $a_7 = 2016$. ¿Cuántas secuencias numéricas cumplen estas condiciones?

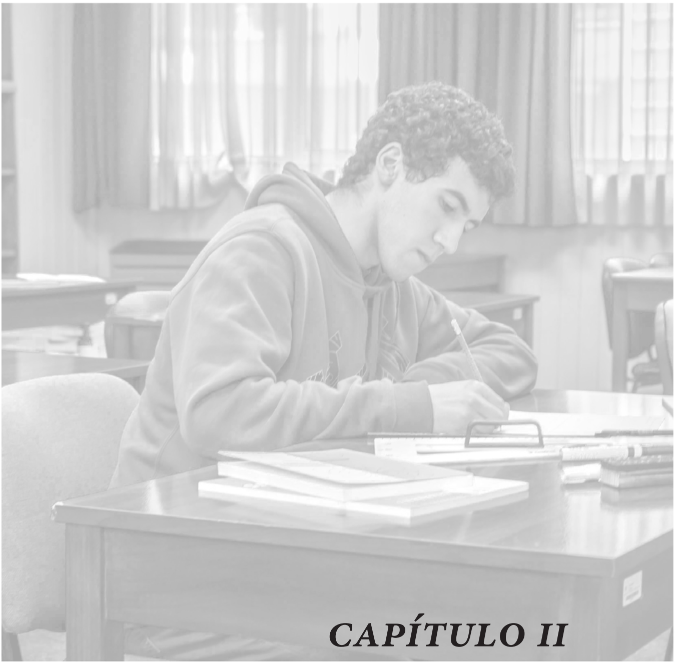
Problema 454. El rectángulo *KLMN* está compuesto por 7 pequeños rectángulos iguales. El perímetro de cada uno de los rectángulos pequeños es 28. ¿Cuál es el área del rectángulo *KLMN*?



Problema 455. Tenemos una fila con 4 números consecutivos. El producto del segundo y tercer número, difiere en 2 unidades, del producto del primer y último número de esta fila. ¿Cuántas filas de 4 números consecutivos cumplen esta condición?

Problema 456. En la compañía Juventud, el promedio de edad de 9 trabajadores es 25 años. En la compañía Venerable, el promedio de edad es de 45 años. Si las compañías se fusionan y nadie es despedido, el promedio de edad es 36 años. ¿Cuántos trabajadores tienen la compañía Venerable?

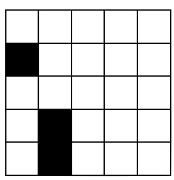
Problema 457. Sea $f(n)$ la suma de los dígitos del entero positivo n. Por ejemplo, $f(2016) = 2 + 0 + 1 + 6 = 9$ y $f(7) = 7$. Si $n < 1000$, ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(f(n)) = 10$?




CAPÍTULO II

SOLUCIONES

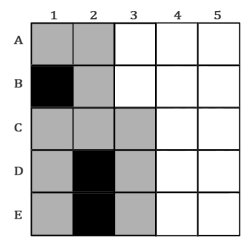
Problema 1. Camilo y una amiga están jugando al "Combate Naval" en un tablero de 5×5. Camilo ya ha ubicado 2 barcos, como se muestra en la figura. Todavía tiene que colocar un barco de 3×1 para que cubra exactamente tres celdas. Sabiendo que dos barcos no pueden tener un punto en común. ¿Cuántas posiciones hay para su barco de 3 × 1?



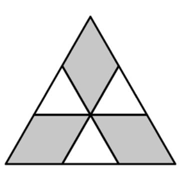
Solución. Dado que dos barcos no pueden tener un punto en común, entonces descartamos todas las casillas que están alrededor de cualquier barco, las casillas que no se utilizarán serán sombreadas para descartarlas. Por lo tanto podemos ubicar los barcos en los siguientes tríos de casillas:

(A3,A4,A5); (B3,B4,B5); (A4,B4,C4); (A5,B5,C5); (B4,C4,D4); (B5,C5,D5); (C4, D4,E4) y (C5,D5,E5).

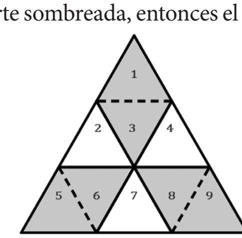
Así, Camilo tiene 8 posibles posiciones para colocar su barco de 3 × 1.



Problema 2. En la imagen, el triángulo grande es equilátero y tiene área 9 cm². Las rectas son paralelas a los lados y dividen cada lado en 3 partes iguales. ¿Cuál es el área de la parte sombreada?



Solución. Al trazar los segmentos punteados en la figura, se puede notar que los 9 triángulos generados son equiláteros e iguales (congruentes). Sus alturas son iguales, dado que están entre rectas paralelas que se encuentran a igual distancia (pues dividimos los lados en tres partes iguales). Además, sus bases son iguales, por la misma razón anterior. Luego los nueve triángulos tienen la misma área. Finalmente considerando que son 6 los triángulos que forman la parte sombreada, entonces el área de esta es 6 cm².



Problema 3. Roberto quiere decirle a Karina un número, en el cual el producto de sus dígitos es igual a 24. ¿Cuál es la suma de los dígitos del número más pequeño que Roberto puede decirle a Karina?

Solución. Para determinar el número de Roberto que cumpla con la condición de que la suma de sus dígitos sea la más pequeña, debemos hallar todos los números que tienen por producto de sus dígitos el número 24 y elegir el menor. Para ello determinaremos todos los divisores de 24 de un dígito.

$D(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$, notemos que existen muchas combinaciones de 4 dígitos {2223, 2232, 1831...}, también existen muchas combinaciones de 3 dígitos {423, 324, 831...}, pero como debemos elegir la combinación que forme el número más pequeño, solamente estudiaremos las combinaciones de 2 dígitos. Por otra parte, el número 1 no modifica el producto, solo aumenta la suma de los dígitos por lo que lo descartaremos.

Las combinaciones posibles de dos dígitos que no contienen unos son:

- Con 3 y 8: 38, 83
- Con 4 y 6: 46, 64

Luego, el menor número es 38 y la suma de sus dígitos es:
$3 + 8 = 11$.

Problema 4. Laura, Iván, Valeria y Cata quieren estar juntos en una foto. Cata y Laura son las mejores amigas y quieren estar juntas. Iván quiere estar junto a Laura porque le gusta. ¿De cuántas formas pueden acomodarse para la foto?

Solución. Como Cata y Laura quieren estar juntas e Iván quiere estar junto a Laura, entonces las únicas dos posibles posiciones para ellos tres son: *CLI* - *ILC*. Por lo tanto en cada una de las posiciones Valeria puede ubicarse o a la izquierda o a la derecha. Luego las posibles posiciones son:

$$CLI-V \qquad V-CLI \qquad ILC-V \qquad V-ILC$$

En total hay 4 formas de acomodarse para la foto.

Problema 5. En el colegio de animales hay 3 gatos, 4 patos, 2 gansos y varios corderos tomando clases. El profesor búho contó las patas de todos sus alumnos en su clase y obtuvo 44 patas. ¿Cuántos corderos hay en la clase?

Solución. Como cada gato tiene 4 patas entonces en 3 gatos contaremos $3 \cdot 4 = 12$ patas. Como cada pato tiene 2 patas entonces en 4 patos contaremos $4 \cdot 2 = 8$ patas. Como cada ganso tiene 2 patas entonces en 2 ganso contaremos $2 \cdot 2 = 4$ patas. Es decir, en total tenemos $12 + 8 + 4 = 24$ patas, luego deberíamos contar 20 patas de cordero para llegar a las 44 patas que contó el profesor búho, y como cada cordero tiene 4 patas, entonces hay 5 corderos en clases, pues $5 \cdot 4 = 20$.

Problema 6. Un globo lleno de Helio puede alzar una canasta que contiene cosas que pesan a lo más 80 kilos. Dos globos llenos de Helio pueden alzar la misma canasta que contiene cosas que pesan a lo más 180 kilos. ¿Cuánto pesa la canasta?

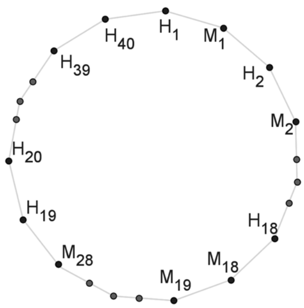
Solución. Notemos que:

- 1 globo soporta el peso de: 1 canasta + 80 kilos de contenido (*)
- 2 globos soportan el peso de : 1 canasta + 180 kilos de contenido (**)

Podemos deducir en (*) que 2 globos también pueden soportar 2 canastas con 160 kilos de contenido distribuido entre ambas. Luego por (**) una canasta debe pesar 20 kilos.

Problema 7. Los nietos, nietas, bisnietos y bisnietas del abuelo Anacleto juegan a la ronda, en total 40 niños y 28 niñas forman un círculo, tomados de la mano. Exactamente 18 niños dan su mano izquierda para una de las niñas. ¿Cuántos niños dan su mano derecha a una chica?

Solución. Pensemos en un arreglo posible para dicha ronda, como se muestra en el dibujo los primeros 36 nietos son ubicados en pareja, es decir, 18 niñas y 18 niños donde el niño H_1 da su mano izquierda a la niña M_1, el niño H_2 da su mano izquierda a la niña M_2 y así sucesivamente hasta que el niño H_{18} da su mano izquierda a la niña M_{18}. Ahora para evitar que un niño vuelva a dar su mano izquierda a una niña ubicaremos las 10 niñas restantes inmediatamente después de la niña M_{18}, hasta ubicar a la última niña, M_{28}. Por último, ubicamos los niños restantes tal que el niño H_{19} dé su mano derecha a la niña M_{18} y su mano izquierda al niño H_{20}, hasta que el niño H_{40} dé su mano izquierda al niño H_1. De este modo, de los 18 niños ubicados en las 18 primeras parejas, solo 17 dan su mano derecha a una niña (pues H_1 da su mano derecha H_{40}). Por otra parte el niño H_{19} también da su mano derecha a la niña M_{28}. Finalmente solo 18 niños dan la mano derecha a una niña.



Problema 8. Escribe todas las secuencias de números enteros consecutivos que contengan al número 7, de forma tal que la razón entre números impares y números pares sea $\frac{2}{3}$

Solución. Notemos que una razón es la comparación de dos cantidades, por ejemplo si en tu curso hay 16 niños y 20 niñas, la razón entre los niños y las niñas es 16:20 o bien 4:5. Dado que la razón entre números impares y pares es:

$$\frac{\textit{números impares}}{\textit{números pares}} = \frac{2}{3}$$

Por cada cinco enteros consecutivos que contengan al número 7 debe haber 2 números impares y 3 números pares. Como el número 7 es impar, y queremos tener dos impares, debemos tener en la secuencia un impar más (el 5 o el 9). Observemos además que en una secuencia de números consecutivos la diferencia entre la cantidad de números impares y pares es a lo más 1 (cuando hay dos pares en los extremos de la secuencia o dos impares en los extremos de la secuencia), por lo tanto es imposible tener otras cantidades que cumplan con la razón, por ejemplo no se pueden tener en una lista de números consecutivos cuatro impares y dos pares. Luego se tiene que las únicas secuencias posibles son los conjuntos {4, 5, 6, 7, 8} y {6, 7, 8, 9, 10}.

Problema 9. Miguel pensó en un número positivo, lo multiplicó por sí mismo, le sumó 1, multiplicó el resultado por 10, le sumó 3, luego multiplicó el resultado por 4 y después le sumó 1. Su último resultado fue 2013. ¿En qué número pensó Miguel?

Solución. Sabemos que: Miguel pensó en un número positivo, lo multiplicó por sí mismo, le sumó 1, multiplicó el resultado por 10, le sumó 3, luego multiplicó el resultado por 4. Su último resultado fue 2012. Miguel pensó en un número positivo, lo multiplicó por sí mismo, le sumó 1, multiplicó el resultado por 10, le sumó 3. Su último resultado fue 503. Miguel pensó en un número positivo, lo multiplicó por sí mismo, le sumó 1, multiplicó el resultado por 10. Su último resultado fue 500. Miguel pensó en un número positivo, lo multiplicó por sí mismo, le sumó 1. Su último resultado fue 50. Miguel pensó en un número positivo, lo multiplicó por sí mismo. Su resultado fue 49. Luego el número que pensó Miguel es 7. De otro modo podemos organizar la información en la siguiente tabla:

Enunciado	Resultado
Lo multiplicó por sí mismo	$n \cdot n$
Le sumó 1	$n \cdot n+1$
Multiplicó el resultado por 10	$10 \cdot (n \cdot n+1)$
Le sumó 3	$10 \cdot (n \cdot n + 1) + 3$
Multiplicó el resultado por 4	$4 \cdot [10 \cdot (n \cdot n + 1) + 3]$
Le sumó 1	$4 \cdot [10 \cdot (n \cdot n + 1) + 3] + 1$
Último Resultado	$4 \cdot [10 \cdot (n \cdot n + 1) + 3] + 1$
Último resultado fue 2013	$4 \cdot [10 \cdot (n \cdot n + 1) + 3] + 1 = 2013$

Resolvamos esta última ecuación:

$$
\begin{gathered}
4 \cdot [10 \cdot (n \cdot n + 1) + 3] + 1 = 2013 \; / -1 \\
4 \cdot [10 \cdot (n \cdot n + 1) + 3] = 2012 \; / \cdot \\
10 \cdot (n \cdot n + 1) + 3 = 503 \; / -3 \\
10 \cdot (n \cdot n + 1) = 500 \; / \cdot \\
n \cdot n + 1 = 50 \; / -1 \\
n \cdot n = 49 \\
n = 7
\end{gathered}
$$

Luego, un número que multiplicado por sí mismo dé 49, se puede inferir que el número buscado es $n = 7$. Por lo tanto Miguel pensó en el número 7.

Problema 10. Las masas de sal y agua en el mar de Pitágoras están en la razón 7 : 193. ¿Cuántos kilogramos de sal hay en 1000 kilogramos de agua de mar?

Solución. Consideremos lo siguiente, dada la razón entre las masas de sal y agua, se tiene que por cada 7 kilos de sal hay 193 kilos de agua y en total 7+193= 200 kilos de agua de mar. En consecuencia por cada 200 kilos de agua de mar, hay 7 kilos son de sal.
Luego, como $1000 = 200 \cdot 5$, habrá $7 \cdot 5 = 35$ kilos de sal. Otra forma de abordar el problema es considerando la siguiente proporción:

$$
\frac{7}{200} = \frac{\textit{kilos de sal}}{1000}
$$

$$
\textit{kilos de sal} = \frac{7 \cdot 1000}{200}
$$

Por lo tanto en 1000 kilogramos de agua de mar habrán 35 kilos de sal.

Problema 11. Un saco contiene bolitas de cinco colores diferentes. Dos son rojas, tres son azules, diez son blancas,

Solución. Como tenemos bolitas de 5 colores distintos, lo peor que puede ocurrir al sacar 5 es que todas salgan de distinto color (azul, blanca, verde, negra y roja), por lo que debemos sacar 6 bolitas, de este modo nos aseguramos que cuatro son verdes y tres son negras. ¿Cuál es el número más pequeño de bolitas que se debería sacar del saco para asegurarse de sacar al menos dos bolitas del mismo color?

se repita una. Por lo tanto para poder estar seguro de tener 2 bolitas de un mismo color es necesario sacar 6 bolitas.

Problema 12. Sabiendo que:

$\frac{1111}{101} = 11$

encontrar el valor

de $\frac{3333}{101} + \frac{6666}{303}$

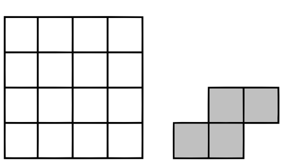
Solución. Al reescribir $\frac{3333}{101}$ se tiene que:
$\frac{3333}{101} = \frac{3 \cdot 1111}{101} = 3 \cdot \frac{1111}{101} = 3 \cdot 11 = 33$

Por otra parte, al reescribir $\frac{6666}{303}$ se tiene que:

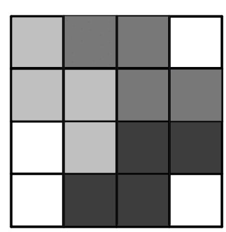
$\frac{6666}{303} = \frac{6 \cdot 1111}{3 \cdot 101} = \frac{6}{3} \cdot \frac{1111}{101} = 2 \cdot 11 = 22$

Finalmente la expresión $\frac{3333}{101} + \frac{6666}{303}$ equivale a sumar $33 + 22 = 55$.

Problema 13. Anita tiene una hoja cuadrada cuadriculada como la que se muestra en la figura. A partir de dicha hoja ella recorta figuras por las líneas del cuadriculado como la que se muestra en la imagen de la derecha. Después de realizar los recortes, ¿cuál es la mínima cantidad posible de cuadraditos restantes?



Solución. En un cuadriculado de 4 × 4 (16 cuadrados), a lo más podrían encajar 4 piezas pequeñas compuestas de 4 cuadrados (cuatriminos). Observemos que si intentamos cubrir una de las esquinas del cuadrado mayor, por ejemplo la esquina superior izquierda (con la pieza gris clara), es imposible poder cubrir la esquina inferior izquierda con otra pieza de la forma pedida. Por lo tanto, no caben 4 piezas, por lo que deberíamos intentar con 3 piezas, de este modo obtenemos un armado como el que muestra la figura (este caso no es único). Finalmente, la cantidad de cuadrados restantes (sin utilizar) son 4.



Problema 14. La Sra. Margarita compró cuatro choclos para cada miembro de su familia de cuatro personas. En la tienda recibió el descuento que le ofrecía la tienda. Oferta de choclos: 1 choclo 200 pesos. Cada 5 choclos el sexto es gratis ¿Cuánto tanto pagó?

Solución. Como son 4 choclos para cada uno de los 4 miembros de la familia, necesita $4 \cdot 4 = 16$ choclos. Como por cada 5 choclos le dan un sexto choclo, si compra 10 le dan 2 de regalo, luego tendrá $10 + 2 = 12$ choclos, así comprando 4 choclos más se llega a los 16 choclos requeridos, por lo tanto debe pagar 14 choclos ($14 \cdot 200 = \$2800$).

Problema 15. Alex enciende una vela cada diez minutos. Cada vela encendida tiene una duración de cuarenta minutos. ¿Cuántas velas están encendidas después de cincuenta y cinco minutos a partir del momento en que Alex enciende la primera vela?

Solución. Como una vela dura 40 minutos, y se enciende una cada 10 minutos, podemos realizar el siguiente análisis:

- Al comenzar tenemos una vela encendida (minuto 0).
- Al minuto 10 encendemos la segunda vela (a la primera vela le quedan 30 minutos).
- Al minuto 20 encendemos la tercera vela (a la primera vela le quedan 20 minutos).
- Al minuto 30 encendemos la cuarta vela (a la primera vela le quedan 10 minutos).
- Al minuto 40 encendemos la quinta vela (la primera vela se apaga).

Desde este momento siempre habrá 4 velas encendidas, pues en el minuto 50 encendemos la sexta vela, pero se habrá apagado la primera y la segunda. Finalmente en el minuto 55 estarán encendidas 4 velas.

Problema 16. El número promedio de hijos en cinco familias no puede ser:

a. 0,2
b. 1,2
c. 2,2
d. 2,4
e. 2,5

Solución. El promedio de niños en 5 familias equivale a la suma de todos los niños de las 5 familias dividida en el total de familias (5). Debe suceder que el total de niños no sea un número decimal, pues no se puede tener, por ejemplo, 1,4 niños o 2,9 niños en total. Sea a_1, el número de niños en la familia 1, a_2, el número de niños en la familia 2, ..., a_5, el número de niños en la familia 5.

$$\text{Promedio} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5}$$

Por lo tanto, el total de niños es 5 veces el promedio.
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5 \cdot \text{Promedio}$

- Para el Promedio = 0,2 se tiene que la cantidad de niños es $5 \cdot 0{,}2 = 1$
- Para el Promedio = 1,2 se tiene que la cantidad de niños es $5 \cdot 1{,}2 = 6$
- Para el Promedio = 2,2 se tiene que la cantidad de niños es $5 \cdot 2{,}2 = 11$
- Para el Promedio = 2,4 se tiene que la cantidad de niños es $5 \cdot 2{,}4 = 12$
- Para el Promedio = 2,5 se tiene que la cantidad de niños es $5 \cdot 2{,}5 = 12{,}5$

Luego no es posible tener 12,5 niños en total, este promedio no puede ser 2,5.

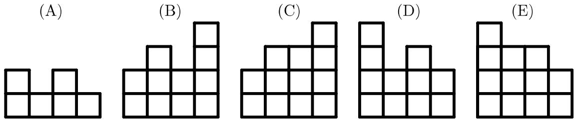
Problema 17. Juan ha construido un edificio de cubos sobre una rejilla de 4×4. La imagen muestra el número de cubos que está sobre cada celda de la rejilla. Cuando Juan la mira desde atrás, ¿cuál de estas imágenes ve?

Vista Trasera

4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
3	3	1	2

Vista Frontal

Solución. Notemos que al mirarlo desde la vista trasera cambiará nuestra orientación, lo que desde el frente está a la derecha, en la vista trasera estará a la izquierda. Es decir, mirado desde atrás veremos desde izquierda a derecha 2, luego 3, luego 3 y luego 4. Notemos que en la tercera columna al mirar desde la vista trasera veremos primero dos cubos, pero atrás de ellos hay 3 cubos, por lo que la torre que se ve tiene altura 3. Luego la vista trasera del edificio será la vista (*C*).

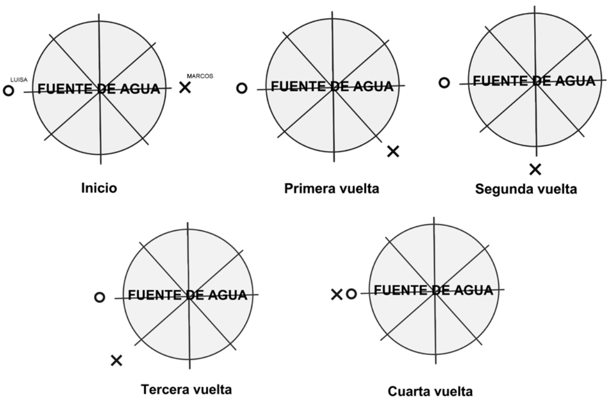


Problema 18. Marcos y Luisa están parados en lados opuestos de una fuente circular. Empiezan a correr en el sentido de las agujas del reloj alrededor de la fuente. La rapidez de Marcos es $\frac{9}{8}$ la rapidez de Luisa. ¿Cuántas vueltas ha dado Luisa antes de que Marcos la alcance por primera vez?

Solución. Como la velocidad de Marcos es $\frac{1}{8}$ más que la velocidad de Luisa, cuando Luisa ha dado 8 vueltas, Marcos ha dado 9 vueltas, ya que en cada vuelta Marcos avanza $\frac{1}{8}$ más.

Cuando Luisa da su primera vuelta, Marcos ya la ha dado y ha avanzado $\frac{1}{8}$ más que Luisa. Luego al dar Luisa su segunda vuelta, Marcos ya la ha dado y ha avanzado $\frac{1}{8}$ más, esto quiere decir que Marcos desde el inicio hasta la segunda vuelta ya ha avanzado $\frac{2}{8}$ más que Luisa. Sin pérdida de la generalidad, se puede notar que en la tercera vuelta de Luisa, Marcos ha dado su vuelta y ha avanzado $\frac{3}{8}$ más que Luisa. A la cuarta vuelta de Luisa, Marcos ha dado su vuelta y ha avanzado $\frac{4}{8}$ más desde su punto de partida, pero $\frac{4}{8}$ equivale a $\frac{1}{2}$.

Esto nos indica que cuando Luisa cumple su cuarta vuelta, Marcos está frente a su punto de partida, donde se encuentra Luisa, por lo tanto Marcos se encuentra con Luisa en la cuarta vuelta. Las siguientes imágenes detallan el proceso.



Problema 19. Los enteros positivos x, y, z satisfacen que x · y = 14 , y · z = 10 y que z · x = 35 ¿Cuál es el valor de x + y + z?

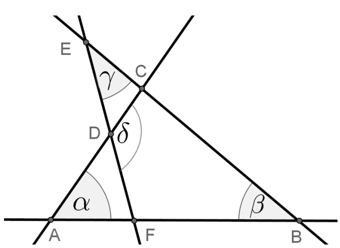
Solución. Debemos encontrar x, y y z, tales que $x \cdot y = 14$, $y \cdot z = 10$ y $z \cdot x = 35$.

Para ello comenzaremos por la primera condición.

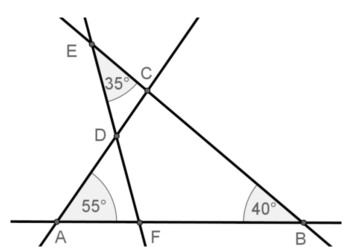
- Como $x \cdot y = 14$, entonces x e y son divisores de 14, por lo tanto, x e y pueden tomar los valores siguientes: 1, 2, 7, 14.
- Como $y \cdot z = 10$, entonces y y z son divisores de 10, por lo tanto y y z pueden tomar los valores siguientes: 1, 2, 5, 10.
- Como $z \cdot x = 35$, entonces z y x son divisores de 35, por lo tanto z y x pueden tomar los valores siguientes: 1, 5, 7, 35.

Si consideramos la primera y la segunda condición, el valor que se repite entre las soluciones para y es 2 , por lo tanto elegimos $y = 2$. Si consideramos la primera y la tercera condición, el valor que se repite entre las soluciones para x es 7, por lo tanto elegimos $x = 7$. Si consideramos la segunda y tercera condición, el valor que se repite entre las soluciones para z es 5, por lo tanto elegimos $z = 5$. Luego $x + y + z = 7 + 2 + 5 = 14$.

Problema 20. En el diagrama, $\alpha = 55°$, $\beta = 40°$, y $\gamma = 35°$. ¿Cuál es el valor de δ?



Solución. En el triángulo FBE el ángulo en $\measuredangle EFB$ es 105º, por lo tanto el ángulo $\measuredangle EFA$ es 75º y en consecuencia el ángulo $\measuredangle ADF$ es 50º, con lo que el ángulo $\measuredangle CDF = \delta = 130º$.



De otra manera, para calcular el ángulo $\measuredangle EFB$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \measuredangle EFB + \gamma + \beta &= 180 \\ \measuredangle EFB + 35 + 40 &= 180 \\ \measuredangle EFB &= 105 \end{aligned}$$

Es decir, se tiene que el ángulo $\measuredangle EFA$, es el suplemento del ángulo $\measuredangle EFB$, pues la suma de ambos es 180º. Por lo tanto, si el ángulo $\measuredangle EFB$ mide 105º, entonces el ángulo $\measuredangle EFA$ mide 75º.

Ya determinando el ángulo $\measuredangle EFA$, podemos calcular el ángulo $\measuredangle ADF$. Al sumar α con en ángulo $\measuredangle EFA$ y con el ángulo $\measuredangle ADF$, su suma debe dar 180º por ser ángulos interiores de un triángulo.

Luego:

$$\begin{aligned} \measuredangle EFA + \alpha + \measuredangle ADF &= 180 \\ 75 + 55 + \measuredangle ADF &= 180 \\ \measuredangle ADF &= 50 \end{aligned}$$

Finalmente el ángulo δ es el suplemento del ángulo °ADF, pues la suma de ambos es 180º. En conclusión, se tiene que

$$\begin{aligned} \delta + {}^{\circ}ADF &= 180 \\ \delta &= 180 - 50 \\ \delta &= 130 \end{aligned}$$

Problema 21. Vanessa escribió varios números enteros consecutivos. ¿Cuál de los siguientes no puede ser el porcentaje de números impares que hay en la lista de Vanessa?

a. 40%
b. 45%
c. 48%
d. 50%
e. 60%

Solución. Como los números son consecutivos, solo hay tres posibilidades:

1. Que se escriba una cantidad par de números, con lo cual habrá igual cantidad de pares que de impares (50% cada uno). Luego 50% es posible.
2. Que se escriba una cantidad impar de números ($2k$+1), k números pares y k+1 números impares en el caso de comenzar con un número impar.
3. Que se escriba una cantidad impar de números ($2k$+1), k+1 números pares y k números impares en el caso de comenzar con un número par. Entonces el problema se reduce a calcular el porcentaje que es k de $2k$+1 o bien el porcentaje que es k+1 de $2k$+1, es decir:

$$\frac{100k}{2k+1} = x\% \text{ o bien } \frac{100(k+1)}{2k+1} = x\%$$

Para cualquier valor de k , $100k$ y $100(k+1)$ es par, y como el denominador es impar, el resultado siempre es par con lo que se descarta el 45%.

Otra forma de encontrar la solución es probar de acuerdo a cada alternativa.

Cuando nos dicen que el porcentaje de números impares es 40%, quiere decir que $40/100$ es el porcentaje de números impares, ahora si simplificamos esa expresión obtendremos que $2/5$ es el porcentaje de números impares, lo que quiere decir que si consideramos 5 números consecutivos, es posible verificar que hay 2 impares entre ellos. En efecto consideremos el caso en donde el primer número sea par, por ejemplo 2, 3, 4, 5, 6, en donde 3 y 5 son nuestros números impares. Por lo tanto 2 números impares de 5 números consecutivos representa exactamente el 40%.

Sucede lo mismo si el porcentaje de números impares es el 60%. Escrito como razón es $\frac{3}{5}$, por lo que basta considerar 5 enteros consecutivos, tales que el primero de ellos sea impar y se obtendrá la respuesta.

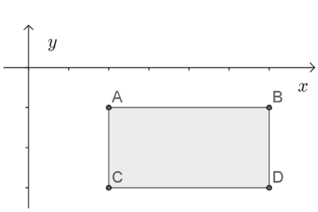
Verifiquemos si es posible construir la lista con el 48% de impares. En efecto, si consideramos que la representación de 48% equivale a $\frac{48}{100} = \frac{12}{25}$, entonces de 25 enteros consecutivos cualesquiera, 12 de ellos son impares. Por ejemplo, considere todos los números desde el 2 hasta el 26, donde los números impares serán 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25. En total 12. Luego, este caso también es posible.

Consideremos la situación cuando el porcentaje de números impares es el 50% de los números consecutivos. Basta considerar, por ejemplo, 10 enteros consecutivos, sí o sí 5 de ellos serán pares y los restantes 5 seránimpares. Verifiquemos que no es posible que dado una cantidad de números consecutivos, el 45% de ellos sean impares. En efecto, se tiene que 45% = $\frac{45}{100}$ = $\frac{9}{20}$. Lo que quiere decir que de 20 enteros consecutivos, 9 de ellos son impares y los restantes 11 son pares. Si considera 20 enteros consecutivos cualesquiera, el lector podrá percatarse que siempre 10 serán impares y 10 serán pares.

Problema 22. Los lados del rectángulo *CDBA* son paralelos a los ejes coordenados. *CDBA* está debajo del eje *X* y a la derecha del eje *Y*, como se muestra en la figura. Las coordenadas de los cuatro puntos *A, B, C* y *D* son todas números enteros. Para cada uno de estos puntos calcula mos el valor

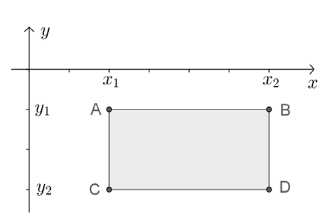
$$\frac{\text{coordenada } y}{\text{coordenada } x}$$

¿Cuál de los cuatro puntos da el menor valor?



Solución. Como se trata de encontrar el mínimo valor de una fracción sabemos que para fracciones positivas, mientras menor sea el numerador menor será la fracción (con iguales denominadores) y que mientras mayor sea el denominador menor será la fracción (con iguales numeradores). Sin embargo estamos en el caso donde el numerador es negativo, entonces sabemos que mientras menor sea el numerador menor será la fracción (con iguales denominadores) y que mientras menor sea el denominador menor será la fracción (con iguales numeradores).

De esta manera, debemos elegir el menor numerador entre y_1 e y_2, por lo que elegimos y_2. Luego, los candidatos son *C* y *D*, y ahora elegimos el menor denominador entre x_1 y x_2, es decir, x_1, por lo que los candidatos son *A* y *C*. Finalmente, *C* es el punto que da el menor valor.



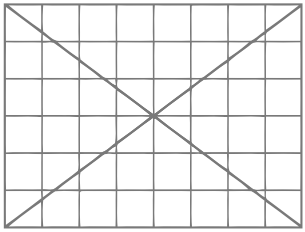
Problema 23. Todos los enteros positivos de cuatro cifras que tienen los mismos dígitos que el número 2013 están escritos en la pizarra en orden creciente. ¿Cuál es la diferencia numérica más grande que hay entre dos números vecinos en la pizarra?

Solución. Determinemos, en orden creciente, todos los números de cuatro cifras que podemos formar con los dígitos de 2013.

1023, 1032, 1203, 1230, 1302, 1320
2013, 2031, 2103, 2130, 2301, 2310
3012, 3021, 3102, 3120, 3201, 3210

Notemos que al pasar de 1320 a 2013 y de 2310 a 3012 se producen las mayores diferencias. Luego para el primer caso, 1320 y 2013, la diferencia entre ellos es 693. Para el segundo caso, 2310 y 3012, la diferencia entre ellos es 702. Luego la mayor diferencia es entre 2310 y 3012.

Problema 24. En la rejilla de 6×8 que se muestra, 24 de las celdas no son interceptadas por una de las diagonales. Cuando se dibujan las diagonales de una rejilla de 6×10, ¿Cuántas celdas no son interceptadas por las diagonales?



Solución. Notemos que al trazar la diagonal de una cudrícula de $n \times m$ esta debe cortar un cuadrado de cada filas (n cuadrados por fila) y un cuadrado de cada columna (m cuadrados por columna). La diagonal debe cruzar $n+m-1$ cuadrados, restamos 1 pues estamos contando el vértice superior dos veces.

En nuestro caso, la diagonal cortaría $8+6-1 = 13$ cuadrados, pero por tener una cantidad par de columnas y de filas, la diagonal cruzará por el vértice común de los cuatro cuadrados centrales por lo que no cortará al cuadrado adyacente, por lo que (restamos nuevamente 1, luego cortará 12 cuadrados en lugar de 13).

Lo mismo ocurrirá en un rectángulo de 6×10, es decir, la diagonal cortará $6+10-1-1 = 14$ cuadraditos. Como trazamos las dos diagonales se cortarán 28 cuadraditos. Como la cuadrícula de 6×10 tiene 60 cuadraditos, no se cortarán 32 de ellos.

Problema 25. Sea S el número de cuadrados entre los enteros 1 y 2013^6. Sea Q el número de cubos entre los mismos números. ¿Cuál de las siguientes alternativas es verdadera?:

a. $S = Q$
b. $2S = 3Q$
c. $3S = 2Q$
d. $S = 2013Q$
e. $SSS = QQ$

Solución. El número de cuadrados entre 1 y $2013^6 =(2013^3)^2$ es claramente 2013^3, es decir, $S = 2013^3$.

El número de cubos entre 1 y $2013^6 = (2013^2)^3$ es claramente 2013^2, es decir, $Q = 2013^2$.

Por lo tanto, como $2013^3 = 2013 \cdot 2013^2$, entonces $S = 2013 \cdot Q$.

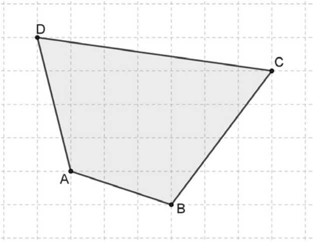
Problema 26. Andrés, Beatriz, Kathy, Daniela y Eduardo nacieron el 20/02/2001, 12/03/2000, 20/03/2001, 12/04/2000 y 23/04/2001 (día, mes, año). Andrés y Eduardo nacieron el mismo mes. Además, Beatriz y Kathy nacieron el mismo mes. Andrés y Kathy nacieron el mismo día de meses diferentes. Además Daniela y Eduardo nacieron el mismo día pero en meses distintos ¿Cuál de los niños es el más joven?

Solución. Sabemos por el enunciado que:

- Andrés y Eduardo nacieron en el mismo mes. Así también Beatriz y Katherine nacieron en el mismo mes. Por lo tanto Daniela fue quien nació en un mes que no se repite (20/02/2001).
- Andrés y Katherine nacieron en el mismo día pero en meses distintos. Así también Daniela y Eduardo nacieron el mismo día pero en meses distintos. Por lo tanto, Beatriz nació un día diferente al de los restantes (23/04/2001).
- Por otra parte, como Daniela y Eduardo nacieron el mismo día pero en meses distintos, como Daniela nació un día 20, entonces Eduardo nació también un día 20, por lo tanto, Eduardo nació el 20/03/2001.
- Ahora como Andrés y Eduardo nacieron en el mismo mes, Andrés nació el 12/03/2000. Finalmente se tiene que Katherine nació en la fecha restante, vale decir que Katherine nació el 12/04/2000.

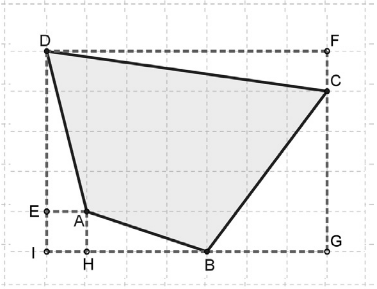
Ordenando la información se tiene que: Andrés nació el 12/03/2000, Beatriz nació el 23/04/2001, Katherine nació el 12/04/2000, Daniela nació el 20/02/2001, Eduardo nació el 20/03/2001, luego, el más joven de ellos es Beatriz.

Problema 27. La figura muestra un cuadrilátero sombreado *ABCD* dibujado sobre un geoplano. Cada celda del geoplano tiene un lado de 2cm. ¿Cuál es el área del cuadrilátero *ABCD*?



Solución. Completamos el rectángulo *DIGF* de $14 \times 10 = 140u^2$ y le quitamos los cuatro triángulos y el cuadradito pequeño, de este modo obtendremos el área de la región *ABCD*.

- $(\triangle AHB) = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6u^2$
- $(\triangle BGC) = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24u^2$
- $(\triangle DFC) = \frac{14 \cdot 2}{2} = 14u^2$
- $(\triangle DEA) = \frac{2 \cdot 8}{2} = 8u^2$
- $(\square EIHA) = 2 \cdot 2 = 4u^2$



Luego el área del cuadrilátero sombreado *ABCD* es:

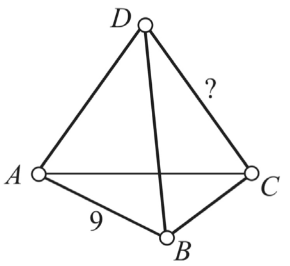
$$140 - (6 + 24 + 14 + 8 + 4) = 84u^2$$

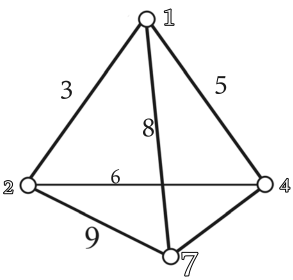
Problema 28. Cada uno de los cuatro vértices y seis aristas de un tetraedro está marcado con uno de los diez números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11 (se omite

Solución.

Posibles aristas	1 2 3 4 5 6 7 8 9 11
Posibles vértices	1 2 3 4 5 6 7 8 9 11

el 10). Cada número se usa una única vez. Por cada dos vértices del tetraedro, la suma de estos números en los vértices es el número de la arista que los conecta. La arista *AB* está marcada con un 9, ¿Qué número se usa para marcar la arista *CD*?





Observemos que como las aristas son el resultado de la suma de dos vértices, estas no pueden ser 1 ni 2. Además, en cada vértice concurren 3 aristas, por lo que 11, 9, 8 no pueden etiquetar algún vértice, pues el 8 a lo más podrá unirse con el 1 o con el 3 (formando solo dos aristas) , el 9 a lo más puede unirse con el 2 (formando solo una arista) y el once no genera ninguna arista, por lo tanto 11, 9, 8 son aristas.

Posibles aristas	~~1~~ ~~2~~ 3 4 5 6 7 **8** **9** **11**
Posibles vértices	**1** **2** 3 4 5 6 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~11~~

Como 1 y 2 son vértices, y dos vértices definen una arista, entonces $1 + 2 = 3$ corresponde a una arista. Por otra parte 4 no puede ser arista pues $4 = 1+ 3$ y 3 es arista, entonces 4 es vértice. Si 4 es vértice, entonces $1 + 4 = 5$, $2 + 4 = 6$ resultan ser aristas.

Posibles aristas	~~1~~ ~~2~~ **3** ~~4~~ **5** **6** 7 **8** **9** **11**
Posibles vértices	**1** **2** ~~3~~ **4** ~~5~~ ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~11~~

Además, el tetraedro tiene 4 vértices, luego el 7 etiqueta un vértice.

$$\text{aristas: } \{3, 5, 6, 8, 9, 10\}$$
$$\text{vértices: } \{1, 2, 4, 7\}$$

Ahora ubicamos los vértices en la figura, comenzando por 7 y 2 que suman 9, luego como 4 y 1 son los vértices de la arista pedida, no importa como los ubiquemos, siempre la arista será 5.

Problema 29. Cinco enteros positivos consecutivos tienen la siguiente propiedad: tres de ellos suman lo mismo que la suma de los otros dos. ¿Cuántos grupos de números enteros cumplen con esta propiedad?

Solución. Sean $n - 2$, $n - 1$, n, $n + 1$, $n + 2$ $n \geq 3$ los cinco enteros positivos, con 3 de ellos haremos un grupo (una tripleta) y con el resto haremos otro (una dupla), tal que la suma de la tripleta sea igual a la suma de la dupla. Notemos que

$$n - 2 + n - 1 + n + n + 1 + n + 2 = 5n$$

Como la suma total debe dividirse en dos grupos con igual suma, entonces $5n$ debe ser par, por lo que n es par, luego $n = 2m$, de este modo los cinco enteros consecutivos tienen la forma $2m{-}2$, $2m{-}1$, $2m$, $2m{+}1$, $2m{+}2$ $m > 1$ y la suma total es $10m$. De modo que la suma de los números de la tripleta siempre será de la forma $6m{+}j$ y la suma de los números de la dupla será de la forma $4m{+}k$, tal que $j{+}k = 0$, o sea $k = -j$. Luego como la suma de la tripleta debe ser igual a la suma de la dupla se tiene que: De modo que la suma de los números de la tripleta siempre será de la forma $6m{+}j$ y la suma de los números de la dupla será de la forma $4m{+}k$, tal que $j + k = 0$, o sea $k = -j$. Luego como la suma de la tripleta debe ser igual a la suma de la dupla se tiene que:

$$6m + j = 4m - j$$
$$2m = 2j$$
$$m = j$$

Concluimos entonces que m solamente puede ser 3 o 2. Finalmente, se tiene que los conjuntos que cumplen la propiedad son:

$$\{2, 3, 4, 5, 6\} \text{ y } \{4, 5, 6, 7, 8\}$$

De otro modo, podríamos haber tanteado los conjuntos, por ejemplo, siendo $n - 2$, $n - 1$, n, $n + 1$, $n + 2$, $n \geq 3$ los cinco enteros positivos, veremos primero si es posible que el mayor ($n + 2$) esté en una tripleta. Para ello sumaremos el mayor con los dos menores en un grupo, y los dos restantes en el otro grupo, tal que dichas sumas sean iguales, es decir:

$$(n + 2) + (n - 2) + (n - 1) = n + (n + 1)$$
$$3n - 1 = 2n + 1$$
$$n = 2$$

Pero $n \geq 3$, luego el entero más grande no puede estar en una tripleta. Intentemos ahora construir tripletas que contengan al entero $n+1$ y no contengan a $n+2$, estas son $n-1$, n, $n+1$; $n-2$, n, $n+1$; $n-2$, $n-1$, $n+1$ y comparemos las sumas con las duplas:

$$(n - 1) + n + (n + 1) = (n - 2) + (n + 2)$$
$$3n = 2n$$
$$n = 0$$

Pero $n \geq 3$.

$$(n - 2) + n + (n + 1) = (n - 1) + (n + 2)$$
$$3n - 1 = 2n + 1$$
$$n = 2$$

Pero $n \geq 3$.

$$(n - 2) + (n - 1) + (n + 1) = n + (n + 2)$$
$$3n - 2 = 2n + 2$$
$$n = 4$$

Hemos encontrado un grupo que cumple esta propiedad {2, 3, 4, 5, 6}. Por último armemos la tripleta con los menores y la dupla con los mayores, de este modo tenemos:

$$(n - 2) + (n - 1) + n = (n + 1) + (n + 2)$$
$$3n - 3 = 2n + 3$$
$$n = 6$$

Hemos encontrado otro grupo que cumple esta propiedad {4, 5, 6, 7, 8}. Finalmente tenemos 2 únicos grupos que cumplen la propiedad.

Problema 30. ¿Cuántos decimales tiene el número:

$$\frac{1}{1024000}$$

escrito en su forma decimal?

Solución. Notemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1024000} &= \frac{1}{1024 \cdot 1000} \\
&= \frac{1}{2^{10} \cdot 10^{3}} \\
&= \overbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2}}^{10 \text{ veces}} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \\
&= \overbrace{0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot \ldots \cdot 0{,}5}^{10 \text{ veces}} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1
\end{aligned}$$

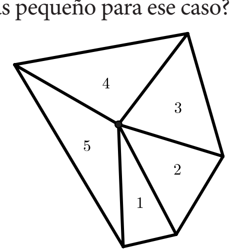
Si contamos los factores, todos con un decimal veremos que el número $\frac{1}{1024000}$ tiene 13 decimales.

Observemos que siempre que multiplicamos 2 decimales el decimal resultante tiene tantos decimales como la suma de los decimales de sus dos factores, siempre que el producto no termine en cero, como es nuestro caso.

Por ejemplo:

- $0,3 \cdot 0,12 = 0,036$
  0, 3 tiene 1 decimal, 0, 12 tiene 2 decimales, luego
  $0{,}3 \cdot 0{,}12 = 0{,}036$ tiene $1 + 2 = 3$ decimales.
- $0,14 \cdot 0,5 = 0,070 = 0,07$
  0, 14 tiene 2 decimales, 0, 5 tiene 1 decimal, luego
  $0{,}14 \cdot 0{,}5 = 0{,}07$ tiene 2 decimales pues $14 \cdot 5$ termina en cero, pues por cada cero al final del resultado es un decimal menos.

Problema 31. La imagen muestra cinco triángulos isósceles con ángulos superiores de 24°, 48°, 72°, 96° y 120°, todos múltiplos del ángulo superior más pequeño, y todos los ángulos tienen un valor entero. Si queremos aumentar la cantidad de triángulos isósceles tanto como sea posible. ¿Cuántos grados tiene el ángulo superior más pequeño para ese caso?



Solución. Notar que.

$$\begin{aligned}
360 &= 24 + 48 + 72 + 96 + 120 \\
&= 24 + 2 \cdot 24 + 3 \cdot 24 + 4 \cdot 24 + 5 \cdot 24 \\
&= 24 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \\
&= 24 \cdot \frac{n(n+1)}{2}, \; n = 5 \text{ (5 triángulos)} \\
&= 25 \cdot 15
\end{aligned}$$

Como se trata de determinar la mayor cantidad posible de triángulos isósceles con ángulos superiores todos múltiplos del más pequeño, debemos encontrar el máximo n tal que:

$$\begin{aligned}
360 &= k \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\
\frac{720}{k} &= n(n+1)
\end{aligned}$$

Luego como n debe ser lo más grande posible, k debe ser lo más pequeño posible.

- $k = 1 \Rightarrow 720 = n(n+1)$, pero no existe $n \in \mathbb{N}$ que cumpla la condición.
- $k = 2 \Rightarrow 360 = n(n+1)$, pero no existe $n \in \mathbb{N}$ que cumpla la condición.
- $k = 3 \Rightarrow 240 = n(n + 1)$, luego $n = 15$, pues $15 \cdot 16 = 240$.

Por lo tanto a lo más tendremos 15 triángulos con ángulo superior igual a 3º, 6º, 9º, ..., 45º, y para este caso el ángulo superior más pequeño es de 3º.

Problema 32. Romina hornea 6 pasteles de frambuesa uno después del otro, numerándolos del uno al seis en orden. Mientras hace esto, sus hijos a veces entran a la cocina y comen el pastel más caliente. ¿Cuál de las siguientes combinaciones no puede ser el orden en que los niños comen los pasteles?

a. *1, 2, 3, 4, 5, 6*
b. *1, 2, 5, 4, 3, 6*
c. *3, 2, 5, 4, 6, 1*
d. *4, 5, 6, 2, 3, 1*
e. *6, 5, 4, 3, 2, 1*

Solución. Analicemos cada uno de los casos:

- 1, 2, 3, 4, 5, 6. Esta combinación es posible. Se hornea y se saca del horno el pastel 1 y los niños entran y lo comen, se hornea y se saca del horno el pastel 2 y los niños entran y lo comen, se hornea y se saca del horno el pastel 3 y los niños entran y lo comen, se hornea y se saca del horno el pastel 4 y los niños entran y lo comen, se hornea y se saca del horno el pastel 5 y los niños entran y lo comen, se hornea y se saca del horno el pastel 6 y los niños entran y lo comen.

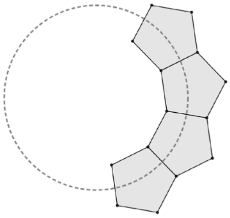
- 1, 2, 5, 4, 3, 6. Esta combinación es posible. Se hornea y se saca del horno el pastel 1 y los niños entran y lo comen, se hornea y se saca del horno el pastel 2 y los niños entran y lo comen, se hornea y se saca del horno el pastel 3, se hornea y se saca del horno el pastel 4, se hornea y se saca del horno el pastel 5 y los niños entran y comen el más caliente, es decir, el último que salió del horno, el pastel 5, mientras se hornea el pastel 6 entran nuevamente y entre el pastel 3 y el pastel 4 comen el más caliente, el pastel 4, luego antes de que salga el pastel 6 del horno entran nuevamente y comen el pastel 3, por último se saca del horno el pastel 6 los niños entran y lo comen.

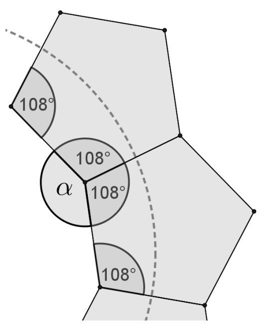
- 3, 2, 5, 4, 6, 1. Esta combinación es posible. Se hornea y se saca del horno el pastel 1, se hornea y se saca del horno el pastel 2, se hornea y se saca del horno el pastel 3 y los niños entran y comen el más caliente, es decir, el último que salió del horno, el pastel 3, mientras se hornea el pastel 4 entran nuevamente y entre el pastel 1 y el pastel 2 comen el más caliente, el pastel 2, luego se hornea y se saca del horno el pastel 4, se hornea y se saca del horno el pastel 5, y los niños entran y comen el más caliente, es decir, el último que salió del horno, el pastel 5, mientras se hornea el pastel 6 entran nuevamente y entre el pastel 1 y el pastel 4 comen el más caliente, el pastel 4, luego se saca del horno el pastel 6 y entre el pastel 1 y el pastel 6 comen el más caliente, el pastel 6, por último, los niños entran nuevamente y comen el único pastel que queda, el pastel 1.

◆ 4, 5, 6, 2, 3, 1. Esta combinación no es posible. Se hornea y se saca del horno el pastel 1, se hornea y se saca del horno el pastel 2, se hornea y se saca del horno el pastel 3, se hornea y se saca del horno el pastel 4 y los niños entran y comen el más caliente, es decir, el último que salió del horno, el pastel 4, se hornea y se saca del horno el pastel 5 y los niños entran y lo comen, se hornea y se saca del horno el pastel 6 y los niños entran y lo comen, luego los niños entran y comen el pastel más caliente, entre el pastel 1 el pastel 2 y el pastel 3, es decir, el último de estos tres que salió del horno, el pastel 3, no el pastel 2 como dice la secuencia.

◆ 6, 5, 4, 3, 2, 1. Esta combinación es posible. Se hornea y se saca del horno el pastel 1, se hornea y se saca del horno el pastel 2, se hornea y se saca del horno el pastel 3, se hornea y se saca del horno el pastel 4, , se hornea y se saca del horno el pastel 5, se hornea y se saca del horno el pastel 6, los niños entran y comen el más caliente, es decir, el último que salió del horno, el pastel 6, los niños entran nuevamente y comen el más caliente de los 5 que queda, el pastel 5, luego el pastel 4, y el pastel 3, y el 2 y el 1.

Problema 33. Ricardo tiene piezas plásticas idénticas con la forma de un pentágono regular. Las pega juntas lado a lado para completar un círculo, como se ve en la figura. ¿Cuántas piezas tiene este círculo?





Solución. Notemos que los ángulos interiores de un pentágono regular suman:

$$180 \cdot (5-2)^{\text{o}} = 540^{\text{o}}$$

Por lo que cada ángulo interior del pentágono regular mide

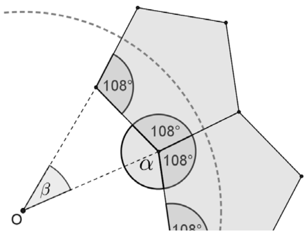
$$\frac{540^{\text{o}}}{5} = 108^{\text{o}}$$

Observemos que la figura formada por Ricardo genera un polígono regular en el interior con la medida del lado igual a la medida del lado de las piezas. Como el ángulo α tiene medida $\alpha = 360^{\text{o}} - 108^{\text{o}} - 108^{\text{o}} = 144^{\text{o}}$, se tiene que en el polígono generado cada ángulo interior mide 144^{o}. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} 144 &= \frac{180 \cdot (n-2)}{n} \\ 144n &= 180n - 360 \\ 360 &= 36n \\ n &= 10 \end{aligned}$$

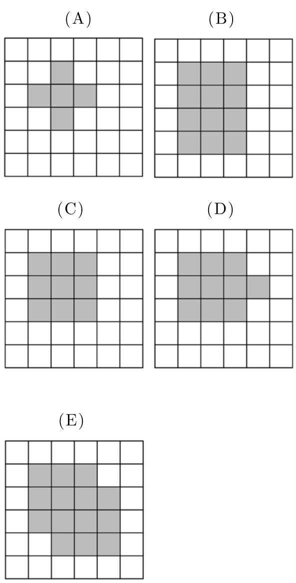
Finalmente el círculo tiene 10 piezas.

De otro modo, notemos que si trazamos los segmentos desde el centro O de la circunferencia tendremos un triángulo isósceles cuyos ángulos basales medirán 72^{o}, por lo que el ángulo central

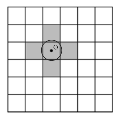


$\beta = 180 - 72 - 72 = 36^{o}$. Como $360 = 36 \cdot 10$ habrá 10 ángulos centrales, por lo que Ricardo unirá 10 piezas.

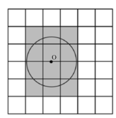
Problema 34. Una alfombra circular se pone sobre un piso con baldosas cuadradas. Todas las baldosas que tienen más de un punto en común con la alfombra se pintan gris. ¿Cuál de las siguientes imágenes representa un resultado no posible?



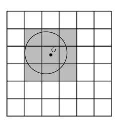
Solución. Sin pérdida de generalidad supongamos que los cuadraditos tienen lado 1, por lo que la diagonal de un cuadradito mide $\sqrt{2}$.



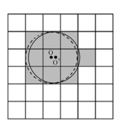
◆ La configuración (A) sí es posible utilizando una alfombra centrada en O con radio $\frac{1}{2} < r \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$



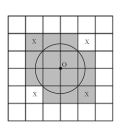
◆ La configuración (B) sí es posible utilizando una alfombra centrada en O con radio $\frac{\sqrt{5}}{2} < r \leq \frac{3}{2}$



◆ La configuración (C) sí es posible utilizando una alfombra punteada centrada en O con radio $\frac{\sqrt{2}}{2} < r \leq \frac{3}{2}$



◆ La configuración (D) sí es posible utilizando una alfombra centrada en O con radio $\frac{\sqrt{2}}{2} < r \leq \frac{13}{2}$ y desplazada hasta O'.



◆ La configuración (E) no es posible, pues si intentamos pintar dos cuadraditos marcados con X debemos pintarlos todos.

Problema 35. El número 200013 - 2013 no es divisible por:

a. 2
b. 3
c. 5
d. 7
e. 11

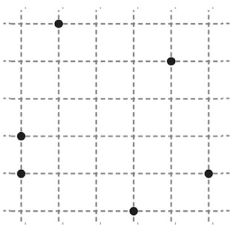
Solución. Como $200013 - 2013 = 198000$ y 198000 termina en cero entonces es divisible por 2 y por 5. Además, la suma de sus dígitos es 18, luego 198000 es también múltiplo de 3. Por último, si dividimos $198000 \div 7$ obtenemos un resultado decimal por lo que no es divisible por 7. Por otra parte, $198000 \div 11 = 18000$. Por lo tanto 200013 - 2013 no es divisible por 7.

De otro modo:

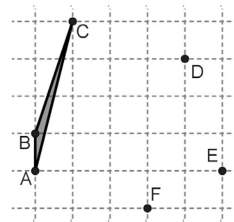
$$\begin{aligned} 200013 - 2013 &= 198000 \\ &= 200000 - 2000 \\ &= 2000 \cdot (100 - 1) \\ &= 2 \cdot 1000 \cdot 99 \qquad = 2 \cdot 5 \cdot 200 \cdot 9 \cdot 11 \end{aligned}$$

Claramente es divisible por 2, por 5, por 9 y por 11.

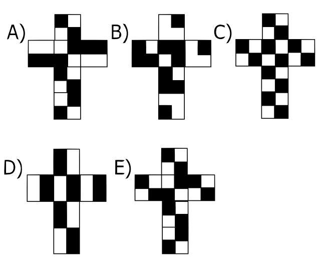
Problema 36. Seis puntos están marcados en un geoplano con celdas de lado 1. ¿Cuál es el área más pequeña de un triángulo con vértices en los lugares marcados?



Solución. El área de un triángulo depende de su altura y su base, por lo que debemos escoger bases pequeñas y alturas pequeñas Notemos que el triángulo ABC es el que tiene menor base (1 unidad) y menor altura (1 unidad), cualquier otro tiene mayor altura o mayor base, luego el triangulo menor tiene $\frac{1}{2}$ u^2 área.

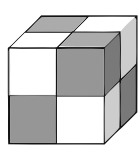


Problema 37. Las caras de un cubo están pintadas con cuadrados blancos y negros como si estuviese hecho con cuatro cubos blancos y negros más pequeños. ¿Cuál de los siguientes esquemas sería el correcto para construirlo a partir de una hoja de papel?



Solución. Observemos que en cada una de las caras la pareja de cuadrados blancos comparten solo un vértice entre ellos (no un lado), del mismo modo los cuadrados negros comparten solo un vértice, por lo cual descartamos las alternativas *A, B* y *D*, pues en estas redes existen parejas de cuadrados del mismo color que comparten un lado dentro de la cara.

Además, los cuadrados blancos siempre comparten dos de sus lados con un cuadradito blanco de la cara contigua, al igual que los negros, por lo que descartamos la alternativa *C*, pues no hay cuadrados contiguos de un mismo color. Luego la red *E* forma el cubo de la figura.



Problema 38. Una pelota de caucho cae verticalmente desde una altura de 15 metros del techo de un edificio. Después de cada impacto con el piso rebota hasta una altura de $\frac{4}{5}$ de la altura anterior. ¿Cuántas veces aparecerá la pelota enfrente de una ventana regular cuyo borde inferior tiene una altura de 5,5 metros y cuyo borde superior tiene una de 6,5 metros?

Solución. Notemos que como el borde superior de la ventana se encuentra a una altura de 6, 5 metros y el borde inferior se encuentra a una altura de 5, 5 metros del suelo, entonces debemos encontrar la cantidad de veces que la pelota se encuentre justo en frente de la ventana. Vale decir a que altura el rebote de la pelota de caucho será mayor a 5, 5 metros y menor que 6, 5 metros.

Veamos que sucede con cada uno de los rebotes viendo un rebote como la trayectoria de la pelota al bajar, tocar el suelo y subir:

- 1^{er} Rebote: $15 \cdot \frac{4}{5} = 12$, luego del 1er rebote la pelota alcanza 12 metros de altura, por lo que se ve la pelota 1 vez bajando y 1 vez subiendo

◆ 2^{do} Rebote : $12 \cdot \frac{4}{5} = 9{,}6$, luego del 2^{do} rebote la pelota alcanza 9,6 metros de altura, por lo que se ve la pelota 1 vez bajando y 1 vez subiendo.

◆ 3^{er} Rebote: $9{,}6 \cdot \frac{4}{5} = 7{,}68$, luego del 3^{er} rebote la pelota alcanza 7,68 metros de altura, por lo que la pelota se ve solo una vez.

◆ 4^{to} Rebote: $7{,}68 \cdot \frac{4}{5} = 6{,}144$, luego del 4^{to} rebote la pelota alcanza 6,144 metros de altura, por lo que la pelota se ve solo una vez.

◆ 5^{to} Rebote: $7{,}68 \cdot \frac{4}{5} = 4{,}9$, luego del 5^{to} rebote la pelota alcanza 4,9 metros de altura, por lo que la pelota ya no se ve.

Finalmente, la pelota de caucho aparece frente a la ventana 7 veces.

Problema 39. El baile del tango se baila en parejas, cada una de un hombre y una mujer. Una noche en un baile no hay más de 50 personas presentes. En algún momento ¾ de los hombres está bailando con ⅘ de las mujeres. ¿Cuántas personas están bailando en ese momento?

Solución. Sea H la cantidad de hombres y M la cantidad de mujeres, notemos que la suma entre la cantidad de hombres y mujeres no debe superar las 50 personas. Notemos que por el enunciado se sabe que una pareja está formada por un hombre y una mujer, como ¾ de los hombres está bailando con ⅘ de las mujeres, entonces el número de hombres y de mujeres que baila tienen que ser iguales, por lo tanto se infiere la siguiente igualdad:

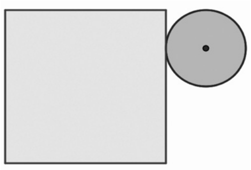
$$\begin{aligned} \frac{3}{4}H &= \frac{4}{5}M \\ \frac{H}{M} &= \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{3} \\ \frac{H}{M} &= \frac{16}{15} \end{aligned}$$

Esto nos dice que $H : M = 16 : 15$, vale decir que cada 16 hombres hay 15 mujeres o bien se puede concluir que los hombres son: $H = \frac{16 \cdot M}{15}$

Entonces como la cantidad de hombres y la cantidad de mujeres deben ser cantidades enteras (no decimales) se tiene que para el caso de las mujeres solo se pueden múltiplos de 15 pues si consideramos otros valores, al realizar el calculo para ver cuántos hombres hay obtendremos una cantidad decimal. Luego el primer posible valor para M es $M = 15$, de lo cual se infiere que $H = 16$, en total habría 31 personas, de las cuales 24 estarían bailando en ese momento.

Veamos si existe una segunda posible solución, consideremos el siguiente múltiplo de 15, el cual es $M = 30$, por lo que se obtiene que el número de hombres sería $H = 32$, pero como la cantidad de hombres y mujeres no debe superar a 50 y en este caso habría 62 personas, se concluye que hay una única solución, es decir, 31 personas de las cuales 24 están bailando.

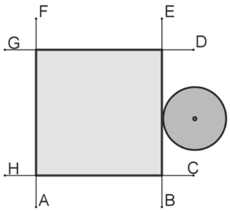
Problema 40. Dado el cuadrado de lado 4 de la figura, se tiene que sobre él se desliza una rueda de radio 1 sobre sus lados. Calcular la longitud del camino que recorre el centro de la rueda.



Solución. Tracemos en los vértices algunos segmentos perpendiculares a los lados tal como se muestra en la figura, es fácil ver que el recorrido que hace el centro de la rueda en los segmentos:

$$\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} + \overline{GH} = 16$$

Ahora nos faltaría calcular el recorrido del centro desde B hasta C, desde D hasta E, desde F hasta G. y desde H hasta A. Este recorrido corresponde al perímetro de la rueda pues los ángulos formados en dichos espacios suman 360º, por tanto el recorrido faltante es 2π. Finalmente el recorrido total es $16 + 2\pi$.



Problema 41. En la reunión anual de caracoles, el caracol Jacinto propone el siguiente desafío a sus amigos ¿Cuántos números de 4 dígitos en que el dígito de la decena y la centena son iguales poseen la propiedad siguiente: después de restar 2997 de dicho número, se obtiene un número de 4 dígitos que consiste en los mismos dígitos en orden inverso? Resuelve tú el problema antes de que lo resuelvan los amigos caracoles.

Solución. Supongamos que el número de 4 dígitos es el $abbc$, entonces se debe cumplir que:

$$\begin{array}{rcccc} & a & b & b & c \\ - & 2 & 9 & 9 & 7 \\ \hline & c & b & b & a \end{array}$$

Vemos primeramente que c debe ser menor que 7, para cuando $c = 1$ se tiene que $a = 4$ y b puede tomar valores entre 0 y 9 es decir, cuando $c = 1$ tenemos 10 números que cumplen dicha condición. Cuando $c = 2$ se tiene que $a = 5$ y b puede tomar valores entre 0 y 9 es decir, cuando $c = 2$ tenemos 10 números que cumplen dicha condición. Podemos realizar este análisis hasta cuando $c = 6$, pues con $c = 7$, $a = 0$. Luego tenemos 60 números que cumplen esta condición.

Problema 42. Al sumarle 4^{15} a 8^{10}, Mónica ha obtenido un nímero que también es potencia de 2. Encuentra este número.

Solución.

$$\begin{aligned} 4^{15} + 8^{10} &= (2^2)^{15} + (2^3)^{10} \\ &= 2^{30} + 2^{30} \\ &= 2 \cdot 2^{30} \\ &= 2^{31} \end{aligned}$$

Problema 43. El abuelo Anacleto, matemático jubilado y aventurero, ha construido una ventana con forma de trapecio cuyo perímetro es de 5 metros y la longitud de sus lados (medidos en metros) son números enteros. ¿Cuál es la medida de los dos ángulos más pequeños de la ventana que construyó el abuelo?

Solución. Notemos que el único conjunto de 4 enteros positivos donde la suma de dichos números es 5 es el {1, 1, 1, 2}, luego la ventana construida por el abuelo tiene la forma de la figura 1 en la cual es claro que los ángulos menores son los basales.

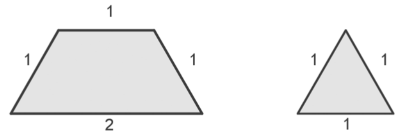
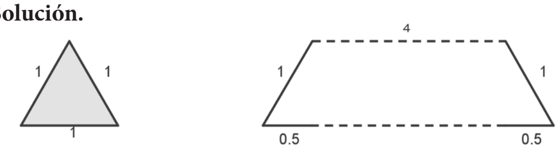


Figura 1 Figura 2

Veamos que dichos ángulos son iguales a los de la figura 2 (la cual resulta al comprimir la figura 1). Como la figura 2 es un triángulo equilátero entonces los ángulos buscados miden 60º

Problema 44. El abuelo Anacleto matemático jubilado y aventurero, sabe construir ventanas con forma de trapecio isósceles, él quiere construir algunas ventanas de perímetro 11 metros, tal que la longitud de sus lados (medidos en metros) sean números enteros. Encuentre todas las posibles ventanas con forma de trapecio que cumplen con estas condiciones.

Solución.



Tal como se muestra en la figura podemos imaginar un trapecio como un triángulo que se estira, al triángulo de la imagen que tiene lados 1, 1, 1 lo estiramos 4 unidades o sea agregamos 4 arriba y 4 abajo y obtenemos un trapecio de lados 1,4,1,5, el cual tiene perímetro 11.

Analicemos ahora todos los casos en que a partir de un triángulo isósceles ocurre esto, para ello siempre denotaremos el par de lados iguales en las dos primeras posiciones:

1,1,1 agregamos 4 arriba y 4 abajo obteniendo $1 + 4 + 1 + 5 = 11$.
2,2,1 agregamos 3 arriba y 3 abajo obteniendo $2 + 3 + 2 + 4 = 11$.
2,2,2 agregamos 2, 5 arriba y 2, 5 abajo, pero 2, 5 no es entero (se descarta)
2,2,3 agregamos 2 arriba y 2 abajo obteniendo $2 + 2 + 2 + 5 = 11$.
3,3,1 agregamos 2 arriba y 2 abajo obteniendo $3 + 2 + 3 + 3 = 11$.
3,3,2 agregamos 1, 5 arriba y 1, 5 abajo, pero 1, 5 no es entero (se descarta)
3,3,3 agregamos 1 arriba y 1 abajo obteniendo $3 + 1 + 3 + 4 = 11$.
3,3,4 agregamos 0, 5 arriba y 0, 5 abajo, pero 0, 5 no es entero (se descarta)
4,4,1 agregamos 1 arriba y 1 abajo obteniendo $4 + 1 + 4 + 2 = 11$.
4,4,2 agregamos 0, 5 arriba y 0, 5 abajo, pero 0, 5 no es entero (se descarta)

Luego tenemos que el abuelo Anacleto puede construir 6 ventanas con la condición dada.

Problema 45. El número de la casa de Ariel tiene tres dígitos. Si se remueve el primer dígito (el de la centena) de este número se obtiene el número de la casa de Benjamín. Si se remueve el primer dígito (el de la decena) del número de la casa de Benjamín, se obtiene el número de la casa de Clara. Si se suman los números de las casas de Ariel, Benjamín y Clara se obtiene 912. ¿Cuál es el segundo dígito del número de la casa de Ariel?

Solución. Consideremos el número de la casa de Ariel como abc, al remover el número de las centenas (a) se obtiene el número de la casa de Benjamín, vale decir que bc es el número de la casa de Benjamín. Nuevamente al remover el primer dígito, en este caso (b), se obtiene el número de la casa de Clara, por lo tanto el número de la casa de Clara es c. Si sumamos los tres números de casa se obtiene 912:

$$\begin{array}{cccc} & a & b & c \\ & & b & c \\ + & & & c \\ \hline & 9 & 1 & 2 \end{array}$$

Luego para que $c+c+c$ sea un número que forme el último dígito de 912, vale decir el 2, tenemos dos opciones, que $c+c+c = 2$ o bien $c+c+c$ sea un número que termine en 2 como 12. Se puede inferir que la primera opción es imposible que se cumpla pues no existe un número entero que sumado tres veces sea igual a 2, para la segunda opción se puede inferir que si $c = 4$ entonces $c+c+c = 4+4+4 = 12$. Luego para $c = 4$, se tiene que $c+c+c$ es un número que termina en 2. Notemos que al sumar un número mayor a 9, reservamos la cifra de las decenas para la siguiente suma, en este caso reservamos 1.

Ahora debemos realizar una suma tal que $b+b$, más la reserva (1) debe ser un número que termine en 1. Luego las posibles opciones son que $b+b+1$ sea 1 o bien que $b+b+1$ sea igual a 11, la primera opción no se cumple pues no existe ningún dígito que al sumarlo consigo mismo y sumarle 1 sea igual a 1. Luego para la segunda opción se hace notar que si $b = 5$, entonces $b+b+1 = 5+5+1 = 11$. Por lo tanto para $b = 5$, se tiene que $b+b+1$ es un número que termina en 1. Nuevamente estamos sumando un número mayor que 9, asique debemos reservar la cifra de las decenas para la siguiente suma, en este caso reservamos nuevamente 1.

Solo resta terminar con la última suma a más la reserva (1) debe ser igual a 9. Mediante una simple deducción, existe solo una solución tal que $a+1$ sea 9. Por lo tanto, $a = 8$.

Finalmente, los números buscados son $a = 8$, $b = 5$ y $c = 4$. Siendo el número de la casa de Ariel 854, por lo tanto, el segundo dígito del número de su casa es 5.

Problema 46. El número de la casa de Ariel tiene cuatro dígitos. Si se remueve el primer dígito de este número se obtiene el número de la casa de Benjamín. Si se remueve el primer dígito del número de la casa de Benjamín, se obtiene el número de la casa de Clara. Si se suman los números de las casas de Ariel, Benjamín y Clara se obtiene 5992. ¿Cuál es el número de la casa de Ariel si la suma de los dígitos de dicho número es 19?

Solución. Consideremos el número de la casa de Ariel como *abcd*, al remover el número de la unidad de mil (a) se obtiene el número de la casa de Benjamín, vale decir que *bcd* es el número de la casa de Benjamín. Nuevamente al remover el primer dígito, en este caso b, se obtiene el número de la casa de Clara, por lo tanto el número de la casa de Clara es *cd*. Si sumamos los tres números de casa se obtiene 5992:

$$\begin{array}{ccccc} & a & b & c & d \\ & & b & c & d \\ + & & & c & d \\ \hline & 5 & 9 & 9 & 2 \end{array}$$

Luego para que $d+d+d$ sea un número que forme el último dígito de 5992, vale decir el 2, tenemos dos opciones, que $d+d+d = 2$ o bien $d+d+d$ sea un número que termine en 2 como 12. Se puede inferir que la primera opción es imposible que se cumpla pues no existe un número entero que sumado tres veces sea igual a 2, para la segunda opción se puede inferir que si d = 4 entonces $d+d+d = 4+4+4 = 12$. Luego para $d = 4$, se tiene que $d+d+d$ es un número que termina en 2. Notemos que al sumar un número mayor a 9, reservamos la cifra de las decenas para la siguiente suma, en este caso reservamos 1.

Ahora debemos realizar una suma tal que $c+c+c$ más la reserva (1) debe ser un número que termine en 9. Luego las posibles opciones son que $c+c+c+1$ sea 9 o bien que $c+c+c+1$ sea igual a 19, la primera opción no se cumple pues no existe ningún dígito que al sumarlo consigo mismo tres veces y sumarle 1 sea igual a 9. Luego para la segunda opción se hace notar que si $c = 6$, entonces $c+c+c+1 = 6 +6+ 6+1 = 19$. Por lo tanto para $c = 6$, se tiene que $c+c+c+1$ es un número que termina en 9. Nuevamente estamos sumando un número mayor que 9, asique debemos reservar la cifra de las decenas para la siguiente suma, en este caso reservamos nuevamente 1.

Ahora bien, debemos determinar un valor de b que cumpla con que $b+b$ más la reserva (1) sea un número que termine en 9, nuestra primera opción es que la suma sea igual a 9 o bien que sea igual a 19. Para ello se puede comprobar que existen dos soluciones, pues para $b = 4$ se cumple que $b+b+1 = 4+4+1 = 9$ y para $b = 9$ se tiene que $b+b+1 = 9+9+1 = 19$. Luego se tienen dos posibles soluciones, $b = 4$ y $b = 9$. Pero notemos que existe una condición, la suma de los dígitos de la casa de Ariel es 19. Por lo tanto debemos encontrar los valores para el último dígito (a) y de acuerdo a ello, ver cual de las dos soluciones cumple con que al sumar $a+b+c+d$ sea igual a 19.

Para el caso de $b = 4$, notemos que no existe reserva pues la suma de b+b+1 es 9, por lo tanto se infiere que a debe ser igual a 5.

Para el caso de $b = 9$, notemos que existe reserva (1), pues b+b+1 es 19, luego se tiene que a más la reserva (1) debe ser igual a 5, por lo tanto $a = 4$.

Solo resta verificar cual de los dos casos cumple con la condición de que los números al sumarlos deben ser igual a 19.

Para el caso de $b = 4$ y $a = 5$, se tiene que $a+b+c+d$ = 5+4+6+4 = 19. Cumple con la condición.

Para el caso de $b = 9$ y $a = 4$, se tiene que $a+b+c+d$ = 4+9+6+4 = 23. No cumple con la condición.

Finalmente los números buscados son $a = 5$, $b = 4$, $c = 6$ y $d = 4$. Siendo 5464 el número de la casa de Ariel.

Problema 47. Encuentre el último dígito (la cifra de las unidades) del número $4^{2013} - 3^{2013}$

Solución. Separaremos el problema en dos casos: El primer caso corresponde a encontrar la cifra de las unidades de 4^{2013} y el segundo caso corresponde a encontrar la cifra de las unidades de 3^{2013}.

Para el primer caso notemos las siguientes regularidades:

- $4^1 = 4$, la cifra de las unidades es 4.
- $4^2 = 16$, la cifra de las unidades es 6.
- $4^3 = 64$, la cifra de las unidades es 4.
- $4^4 = 256$, la cifra de las unidades es 6.
- $4^5 = 1024$, la cifra de las unidades es 4.

En general, notemos que en toda potencia de 4, la cifra de sus unidades será 4 o 6. Si el exponente de la potencia de 4 es impar, entonces la cifra de las unidades será 4 y en el caso cuando el exponente de la potencia de 4 es par, la cifra de las unidades será 6. Luego como 4^{2013} es una potencia de 4 con exponente impar, entonces la cifra de las unidades de 4^{2013} es 4.

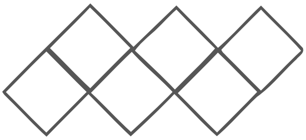
Para el segundo caso, al igual que en el primer caso, notemos las siguientes regularidades:

- $3^1 = 3$, la cifra de las unidades es 3.
- $3^2 = 9$, la cifra de las unidades es 9.
- $3^3 = 27$, la cifra de las unidades es 7.
- $3^4 = 81$, la cifra de las unidades es 1.
- $3^5 = 243$, la cifra de las unidades es 3.

En general en toda potencia de 3, ocurre que la cifra de las unidades será en 1, 3, 7 o 9. Notemos que a cada cuatro unidades en el exponente volvemos a tener como ultima cifra el dígito 3 apartir del exponente 1. Por lo tanto como 2012 es divisible por 4 sabemos que 3^{2012} termina en 1, luego 3^{2013} termina en 3.

Finalmente se nos pide calcular la última cifra de $4^{2013} - 3^{2013}$, por lo cual debemos solo restar la última cifra de 4^{2013} con la de 3^{2013}, de donde se obtiene que $4 - 3 = 1$. Por lo tanto la última cifra de la diferencia $4^{2013} - 3^{2013}$ es 1.

Problema 48. La siguiente figura muestra 6 cuadrados en zigzag de lados 1cm × 1cm. Su perímetro es 14cm, ¿Cuál es el perímetro de un zigzag hecho de la misma manera pero con 2013 cuadrados?



Solución. Estudiemos el problema con bloques de 2 cuadrados de perímetro 6cm cada uno. Cuando pegamos 2 de estos bloques tenemos un bloque de perímetro $6 + 6 - 2 = 10$ cm pues al pegar 2 bloques perdemos 2 lados del perímetro.

Cada vez que peguemos un nuevo bloque perderemos 2 lados, es decir, se agregan solo 4 unidades por cada bloque de 2 cuadraditos, de este modo tenemos que:

- 1 bloque → 2 cuadraditos → perímetro: 6 cm.
- 2 bloques → 4 cuadraditos → perímetro: $6 + 4 = 10$ cm.
- 3 bloques → 6 cuadraditos → perímetro: $6 + 4 + 4 = 14$ cm.

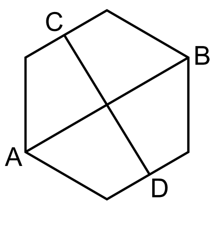
…

- 1006 bloques → 2012 cuadraditos → perímetro:

$6 + \underbrace{4 + 4 + \ldots + 4}_{1005 \text{ veces}} = 6 + 1005 \cdot 4 = 6 + 4020 = 4026$ cm.

Finalmente agregamos un cuadradito más para completar los 2013, y dicho cuadradito aporta con 2 cm. Por lo tanto el perímetro de la figura es de 4028 cm.

Problema 49. El segmento AB une dos vértices opuestos de un hexágono regular. El segmento CD une dos puntos medios de lados opuestos. Encuentra el producto entre los segmentos AB y CD si el área del hexágono es $60u^2$.

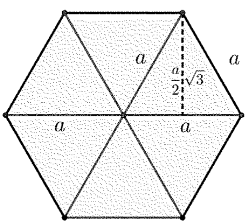


Solución. Un hexágono regular está formado por 6 triángulos equiláteros congruentes de lado a y de área $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Como el hexágono tiene área $60u^2$ entonces cada triángulo equilátero tiene área $10u^2$. De este modo se cumple que

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 10$$

Por otra parte, notamos que $AB = 2a$ y que $CD = 2 \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = a\sqrt{3}$.
Luego: $AB \cdot CD = 2a \cdot a\sqrt{3} = 2a^2\sqrt{3} = 80$



Problema 50. Un grupo de estudiantes tuvo una prueba. Si cada niño hubiese tenido 3 puntos más en su prueba, entonces el promedio del curso hubiese sido 1,2 puntos más alto de lo que fue. ¿Cuál es el porcentaje de niñas en el curso?

Solución. Sea h el número de hombres y $H_1, H_2, \ldots H_h$ sus notas. Sea m el número de mujeres y $M_1, M_2, \ldots M_m$ sus notas. Por lo tanto:

$$\overline{x} = \frac{H_1 + H_2 + \ldots + H_h + M_1 + M_2 + \ldots + M_m}{h+m}$$

Y si cada niño hubiese obtenido 3 punto más se tendríamos lo siguiente:

$$\overline{x} + 1{,}2 = \frac{H_1 + 3 + H_2 + 3 + \ldots + H_h + 3 + M_1 + M_2 + \ldots + M_m}{h+m}$$

$$\overline{x} + 1{,}2 = \frac{H_1 + H_2 + \ldots + H_h + M_1 + M_2 + \ldots + M_m + 3h}{h+m}$$

$$\overline{x} + 1{,}2 = \frac{H_1 + H_2 + \ldots + H_h + M_1 + M_2 + \ldots + M_m}{h+m} + \frac{3h}{h+m}$$

$$\overline{x} + 1{,}2 = \overline{x} + \frac{3h}{h+m}$$

$$1{,}2 = \frac{3h}{h+m}$$

$$1{,}2(h+m) = 3h$$

$$1{,}2h + 1{,}2m = 3h$$

$$1{,}2m = 1{,}8h$$

$$\frac{m}{h} = \frac{1{,}2}{1{,}8} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Luego se tiene que de 5 estudiantes en el curso, 2 son niñas, por lo tanto el porcentaje de niñas en el curso es de $\frac{2}{5} = 0,4$, es decir, un 40%.

Problema 51. Hoy, Juan y su hijo están celebrando su cumpleaños. Juan multiplicó correctamente su edad con la de su hijo y obtuvo 2013 como resultado. ¿Qué edad tiene Juan?

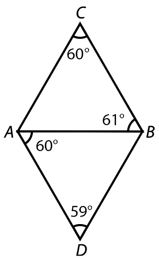
Solución. Notemos que $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ (descomposición prima de 2013), luego las edades de Juan y su hijo pueden ser:

- 3 y $11 \cdot 61$, pero Juan no puede tener 671 años.
- 11 y $3 \cdot 61$, pero Juan no puede tener 183 años.
- 61 y $3 \cdot 11$.

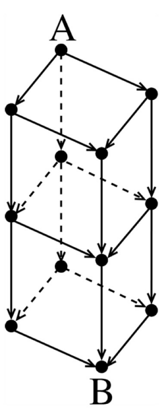
Finalmente, Juan tiene 61 años y su hijo tiene 33 años.

Problema 52. Joaquín quería dibujar dos triángulos equiláteros pegados para formar un rombo. Pero no midió bien todas las distancias y, una vez que terminó, Alejandra midió los cuatro ángulos y vio que no eran iguales. ¿Cuál de los cuatro segmentos es el más largo?

Solución. Observemos que en el triángulo ABD, AB es el lado más pequeño pues se opone al ángulo menor ($\angle ADB = 59°$), pero AB no es el lado más pequeño del triángulo ABC, pues el lado BC se opone al ángulo menor. De esto podemos deducir que el triángulo ABD es más grande que el triángulo ABC, por lo tanto, el lado más grande del cuadrilátero $ADBC$ será el lado más grande del triángulo ABD, es decir, el lado BD pues se opone al ángulo mayor.



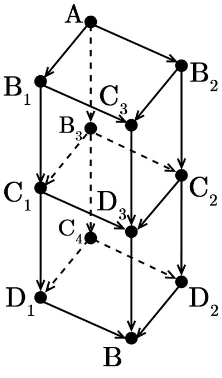
Problema 53. ¿Cuál es la máxima cantidad de caminos diferentes para llegar desde el punto A hasta el B en el gráfico siguiente?



Solución. Comenzamos desde A y tenemos 3 llegadas posibles B_1, B_2 y B_3, desde B_1 tenemos 2 llegadas C_1 y C_3, desde B_2 tenemos 2 llegadas C_2 y C_3 y desde B_3 tenemos 3 llegadas C_1, C_2 y C_4. Hasta ahora llevamos 7 caminos.

- Si seguimos el camino A, B_1, C_1 tenemos 2 posibles llegadas D_1, D_3.
- Si seguimos el camino A, B_1, C_3 tenemos 1 posible llegada D_3.
- Si seguimos el camino A, B_2, C_2 tenemos 2 posibles llegadas D_2, D_3.
- Si seguimos el camino A, B_2, C_3 tenemos 1 posible llegada D_3.
- Si seguimos el camino A, B_3, C_1 tenemos 2 posibles llegadas D_1, D_3.
- Si seguimos el camino A, B_3, C_2 tenemos 2 posibles llegadas D_2, D_3.
- Si seguimos el camino A, B_3, C_4 tenemos 2 posibles llegadas D_1, D_2.

Como desde cada punto D_i, $i = 1, 2, 3$ tenemos solo una manera de llegar hasta B entonces tenemos 12 caminos posibles.

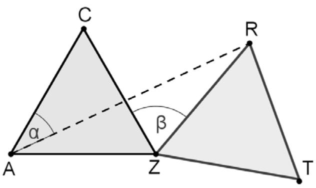


Problema 54. Se da un número de seis dígitos. La suma de sus dígitos es par, el producto de sus dígitos es impar. ¿Cuál es la afirmación correcta sobre el número?

a. Ya sea 2 o 4 dígitos del número son par.
b. Un número así no existe.
c. La cantidad de dígitos impares del número es impar.
d. El número puede estar formado por dígitos diferentes entre ellos.
e. Ninguna de las Anteriores.

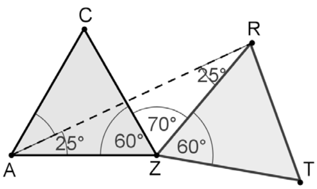
Solución. Claramente entre los seis dígitos del número no puede haber un dígito par, pues de ser así el producto de los dígitos sería par. Por lo tanto, deben ser todos los dígitos impares, y si sumamos 2 dígitos impares la suma de ellos es par, por lo que la suma de lo 6 dígitos impares también es par, es decir, tal número no existe.

Problema 55. El triángulo RZT es el resultado del triángulo equilátero AZC al girarlo alrededor del punto Z, donde $\beta = \angle CZR = 70°$. Determine el valor del ángulo $\alpha = \angle CAR$.



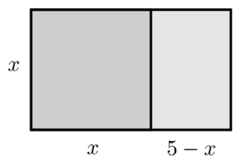
Solución. Como el triángulo RZT es equilátero y el triángulo AZC es el resultado de una rotación, se tiene que $AZ \cong RZ$ por lo que el triángulo $\triangle AZR$ es isósceles. Además $\angle AZR = 60° + 70° = 130°$. De este modo $\angle ZAR \cong \angle ZRA = 25°$ y como $\angle CAZ = 60°$ se tiene que:

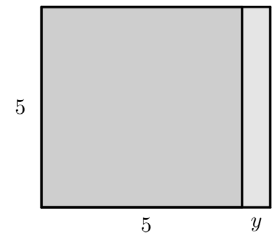
$$\alpha + 25° = 60 \Rightarrow \alpha = 35$$



Problema 56. Considere un rectángulo, en el que uno de sus lados mide 5 unidades. El rectángulo puede ser cortado en un cuadrado y un rectángulo de lados enteros, uno de los cuales tiene área 4. ¿Cuántos rectángulos existen que cumplan con esto?

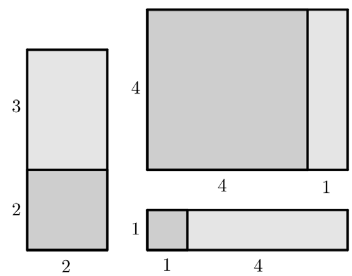
Solución. Notemos que un posible corte es cuando el lado de longitud 5 se divide en dos partes (x y $5-x$) así formamos un cuadrado de lado x y un rectángulo de lados x y $5 - x$. Otro posible corte es cuando con el lado de longitud 5 formamos un cuadrado y trazamos un rectángulo de lados 5 e y.





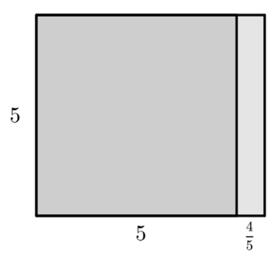
En el primer caso tenemos 2 posibilidades:

- $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$
- $$\begin{aligned} x \cdot (5 - x) &= 4 \\ x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ (x-4)(x-1) &= 0 \\ x = 4 \lor x &= 1 \end{aligned}$$



En el segundo caso tenemos solo una posibilidad:

- $5 \cdot y = 4 \Rightarrow y = \dfrac{4}{5}$



Problema 57. El número n es el entero positivo más grande para el cuál $4n$ es un número de tres dígitos, y m es el entero positivo más pequeño para el cual $4m$ es un número de tres dígitos. ¿Cuál es el valor de $4n{-}4m$?

Solución. Como $4n$ es un número de tres dígitos y n es el entero positivo más grande, $4n$ es a lo más 900, es decir:

$$4n \leq 999 \Rightarrow n \leq \frac{999}{4} = 249,8$$

Luego $n = 249 \Rightarrow 4n = 996$

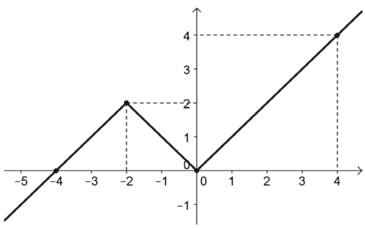
Como $4m$ es un número de tres dígitos y m es el entero positivo más pequeño, $4m$ es por lo menos 100, es decir:

$$4m \geq 100 \Rightarrow n \geq \frac{100}{4} = 25$$

Luego $m = 25 \Rightarrow 4m = 100$

Finalmente, $4n - 4m = 996 - 100 = 896$

Problema 58. Victor ha dibujado el gráfico de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, compuesto por dos rectas y un segmento de línea (ver figura). ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(f(f(x))) = 0$?



Solución. Claramente $f(-4) = 0$ y $f(0) = 0$, observemos que en el intervalo $(-\infty,-2)$, $f(x) = x + 4$, luego:

$$f(f(f(x))) = 0 \Rightarrow f(\overbrace{f(f(x))}^{-4 \text{ o } 0}) = 0$$

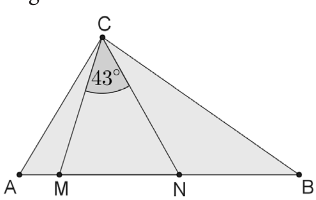
1. $f(f(x)) = -4 \Rightarrow f(\overbrace{f(x)}^{-8}) = -4$
   - $f(x) = -8 \Rightarrow x_1 = -12$

2. $f(f(x)) = 0 \Rightarrow f(\overbrace{f(x)}^{-4 \text{ o } 0}) = 0$
   - $f(x) = -4 \Rightarrow x_2 = -8$
   - $f(x) = 0 \Rightarrow x_3 = -4$ o $x_4 = 0$

Por lo tanto la ecuación tiene 4 soluciones

$$x_1 = -12,\ x_2 = -8,\ x_3 = -4,\ x_4 = 0$$

Problema 59. En el triángulo ABC los puntos M y N en el lado AB están ubicados de manera tal que $AN = AC$ y $BM = BC$. Encuentre el valor del ángulo $\angle ACB$ si $\angle MCN = 43°$.



Solución. Como $AN = AC$ y $BM = BC$ entonces: $\angle ANC \cong \angle NCA = \alpha$ y $\angle CMB \cong \angle BCM = \beta$

Notemos que en el triánagulo MCN se tiene que $\angle NCM = 180-\alpha-\beta = 43$, luego $\alpha+\beta = 137$, por lo que

$$\angle ACB = \alpha+\beta-43 = 137-43 = 94.$$

Finalmente el $\angle ACB = 94°$.

Problema 60. ¿Cuántos pares (x, y) de números enteros satisfacen la ecuación $x^2 \cdot y^3 = 6^{12}$?

Solución. Como $6^{12} = 2^{12} \cdot 3^{12}$ se tiene que x tiene la forma $x = 2^p \cdot 3^q$ e y tiene la forma $y = 2^r \cdot 3^s$, luego:

$6^{12} = x^2 \cdot y^3$
$= (2^p \cdot 3^q)^2 \cdot (2^r \cdot 3^s)^3$
$= 2^{2p+3r} \cdot 3^{2q+3s}$

Por lo tanto $2^{12} \cdot 3^{12} = 2^{2p+3r} \cdot 3^{2q+3s} \Rightarrow 2p + 3r = 12$ y $2q + 3s = 12$, luego:

p	r
3	2
0	4
6	0

q	s
3	2
0	4
6	0

De este modo se tienen 9 soluciones:

- $x = 2^3 \cdot 3^2, y = 2^3 \cdot 3^2$
- $x = 2^3 \cdot 3^2, y = 2^0 \cdot 3^4$
- $x = 2^3 \cdot 3^2, y = 2^6 \cdot 3^0$
- $x = 2^0 \cdot 3^4, y = 2^3 \cdot 3^2$
- $x = 2^0 \cdot 3^4, y = 2^0 \cdot 3^4$
- $x = 2^0 \cdot 3^4, y = 2^6 \cdot 3^0$
- $x = 2^6 \cdot 3^0, y = 2^3 \cdot 3^2$
- $x = 2^6 \cdot 3^0, y = 2^0 \cdot 3^4$
- $x = 2^6 \cdot 3^0, y = 2^6 \cdot 3^0$

Problema 61. Una caja contiene 900 cartas numeradas del 100 al 999. Dos cartas cualesquiera tienen números diferentes. Francisco toma algunas cartas y saca la suma de los dígitos de cada una. ¿Cuántas cartas debe tomar para asegurarse de tener tres cartas cuya suma sea igual?

Solución. Las posibles sumas de los dígitos de números entre 100 y 999, pueden ir desde el 1 al 27, pues entre 100 y 999 el número que contiene las cifras más pequeñas es 100, donde $1 + 0 + 0 = 1$, y el número que contiene las cifras más grandes es el 999, donde $9 + 9 + 9 = 27$, además, el único número en el cual la suma de sus dígitos es 1 es el 100, y el único número en el cual la suma de sus dígitos es 27 es el 999.

De este modo, si tomamos 27 cartas de la caja, en el peor de los casos podríamos tener 27 sumas distintas, pero entre esas cartas estaría el 100 y el 999 que eran las únicas cuyas sumas de sus dígitos eran 1 y 27 respectivamente, luego tomamos solo 25 cartas de la caja (pues ya sacamos el 100 y el 999) y nos aseguramos de tener por lo menos dos sumas iguales.

Ahora resta sacar una carta más y la suma de sus dígitos coincidirá con alguna de las dos sumas anteriores. Hemos tomado 27 cartas la primera vez, 25 cartas la segunda vez y por último 1 carta, en total serán 53 cartas las que nos aseguran tener 3 cartas cuya suma de sus cifras sean iguales.

Problema 62. Sea $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ la función definida por $f(n)= \frac{n}{2}$ si n es par, y por $f(n)= \frac{n-1}{2}$ si n es impar , para todos los números naturales n. Para el entero positivo k, $f^k(n)$ denota la expresión $f(f(\dots f(n)\dots))$, donde el símbolo f aparece k veces. Entonces el número de soluciones de la ecuación $f^{2013}(n) = 1$ es:

Solución.

$$f^{2013}(n) = 1$$
$$f(f^{2012}(n)) = 1$$
$$f^{2012}(n) = 2 \vee f^{2012}(n) = 3$$

$f^{2012}(n) = 2$	$f^{2012}(n) = 3$
$f(f^{2011}(n)) = 2$	$f(f^{2011}(n)) = 3$
$f^{2011}(n) = 4 \vee f^{2011}(n) = 5$	$f^{2011}(n) = 6 \vee f^{2011}(n) = 7$

$f^{2011}(n) = 4$	$f^{2011}(n) = 5$	$f^{2011}(n) = 6$	$f^{2011}(n) = 7$
$f(f^{2010}(n)) = 4$	$f(f^{2010}(n)) = 5$	$f(f^{2010}(n)) = 6$	$f(f^{2010}(n)) = 7$
$f^{2010}(n) = 8$	$f^{2010}(n) = 10$	$f^{2010}(n) = 12$	$f^{2010}(n) = 14$
$\vee$	$\vee$	$\vee$	$\vee$
$f^{2010}(n) = 9$	$f^{2010}(n) = 11$	$f^{2010}(n) = 13$	$f^{2010}(n) = 15$

Notemos que como la ecuación $f(f(n)) = a$ con a entero tiene siempre dos soluciones, consecuentemente $f^{2013}(n) = 1$ tiene 2^{2013} soluciones.

Problema 63. Sea $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ la función definida por las siguientes propiedades: f es periódica de periodo 5 y la restricción de f al intervalo $[-2, 3]$ es $x \to f(x) = x^2$. ¿Cuánto vale $f(2013)$?

Solución. Como f es periódica de periodo 5, entonces $f(x+5k) = f(x)$, para todo x real y k natural. por lo tanto, basta con lo siguiente:

$$f(2013) = f(-2 + 2015) = f(-2 + 5 \cdot 403) = f(-2) = (-2)^2 = 4$$

Problema 64. ¿Cuántas soluciones (x, y), donde x e y son números reales, tiene la ecuación $x^2 + y^2 = |x| + |y|$?

Solución. Supongamos $x > 0$ e $y > 0$ entonces $x^2 + y^2 = x + y$, completando cuadrados tenemos la ecuación de una circunferencia.

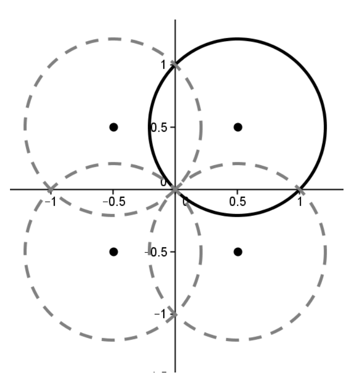
$$x^2 - x + y^2 - y = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Dicha circunferencia tiene centro en el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y radio $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Análogamente suponiendo que $x > 0$ e $y < 0$, $x < 0$ e $y > 0$, $x < 0$ e $y < 0$ tenemos tres circunferencias más, pero dada que la primera circunferencia nos entrega infinitas soluciones no es necesario determinas las otras tres.



Problema 65. Hay algunas rectas dibujadas en el plano. La recta a intersecta exactamente a tres rectas y la recta b intercecta exactamente a 4 rectas. La recta c intercecta exactamente n rectas, con $n \neq 3, 4$. Determine el número de rectas dibujadas en el plano.

Solución. Si la recta a corta 3 rectas entonces la recta a no es paralela a ninguna de estas rectas, para que la recta b corte las 4 rectas anteriores , la recta b no es paralela a ninguna de estas rectas. Luego basta que la recta c no sea paralela a la recta a ni a la recta b, así nos aseguramos que no corta 3 rectas (como a) y no corta 4 rectas (como b), de este modo tenemos 6 rectas.

Problema 66. ¿Cuántos pares *(x, y)* de enteros con $x \leq y$ existen de manera que su producto sea 5 veces la suma de ambos?

Solución. Para (x, y) tenemos la siguiente condición:

$$\begin{aligned} xy &= 5(x+y) \\ xy &= 5x + 5y \\ xy - 5x - 5y &= 0 \\ x(y-5) - 5(y-5) - 25 &= 0 \\ (y-5)(x-5) &= 25 \end{aligned}$$

Luego

- $y - 5 = 5$ y $x - 5 = 5$ entonces $y = 10$ y $x = 10$.
- $y - 5 = -5$ y $x - 5 = -5$ entonces $y = 0$ y $x = 0$.
- $y - 5 = 1$ y $x - 5 = 25$ entonces $y = 6$ y $x = 30$, no es solución pues $x > y$.
- $y - 5 = -1$ y $x - 5 = -25$ entonces y $= 4$ y $x = -20$.
- $y - 5 = 25$ y $x - 5 = 1$ entonces $y = 30$ y $x = 6$.
- $y - 5 = -25$ y $x - 5 = -1$ entonces $y = -20$ y $x = 4$, no es solución pues $x > y$.

Por lo tanto 4 pares cumplen la condición.

Problema 67. Una secuencia comienza como 1,–1,–1, 1,–1. Después del quinto término, cada término es igual al producto de los dos términos anteriores. Por ejemplo, el sexto término es igual al producto del cuarto término y el quinto término. ¿Cuál es la suma de los primeros 2013 términos?

Solución. Puesto que la sucesión es:

$$1,-1,-1,\ 1,-1,-1,\ 1,-1,-1,\ 1,-1,-1,\ \ldots$$

Dividamos esta sucesión en bloques de tres elementos, y observemos que los elementos de cada bloque suman -1.

$$\underbrace{1,-1,-1,}_{-1}\ \underbrace{1,-1,-1,}_{-1}\ \underbrace{1,-1,-1,}_{-1}\ \underbrace{1,-1,-1,}_{-1}\ \ldots$$

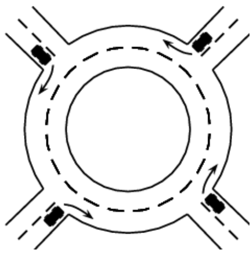
Luego como la sucesión tiene 2013 términos y $2013 \div 3 = 671$, tiene 671 bloques de los anteriormente mencionados. De este modo la suma de los primeros 2013 términos es $671 \cdot (-1) = -671$.

Problema 68. Cuatro vehículos entran a una rotonda al mismo tiempo, cada uno de ellos desde una dirección diferente. Cada uno de los vehículos maneja por menos de una vuelta por la rotonda, y no hay ninguna pareja de carros que salgan por la misma dirección. ¿Cuántas

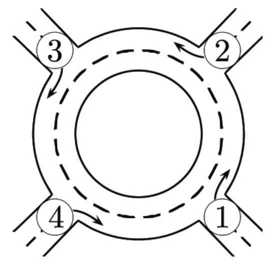
Solución. Sean A_1, A_2, A_3, A_4 los cuatro autos, donde cada uno entra por la puerta 1, 2, 3, 4 respectivamente. La siguiente tabla muestra las posibles puertas de salida de los autos A_2, A_3, A_4 cuando el auto A_1 sale por la puerta 2:

A_1	A_2	A_3	A_4
2	1	4	3
2	4	1	3
2	3	4	1

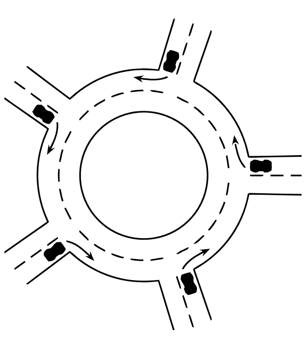
maneras diferentes hay para que los vehículos salgan de la rotonda?



Luego cuando el auto A_1 sale por la puerta 2 los autos A_2, A_3, A_4 tienen 3 maneras de salir, análogamente cuando el auto A_1 salga por la puerta 3 los autos A_2, A_3, A_4 tendrán 3 maneras de salir, y cuando el auto A_1 salga por la puerta 4 los autos A_2, A_3, A_4 tendrán 3 maneras de salir. Por lo tanto los cuatro autos tienen $3 \cdot 3 = 9$ maneras de salir de la rotonda.



Problema 69. A la rotonda de la figura, entran cinco autos al mismo tiempo, cada uno por una pista diferente. Cada auto maneja menos de una vuelta por ella y ningún auto sale de la rotonda por la misma dirección que otro. ¿Cuántas diferentes combinaciones hay para que los autos salgan de la rotonda?

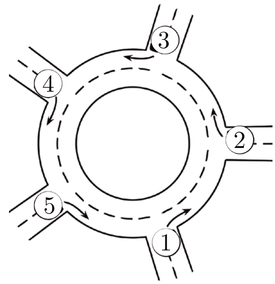


Solución. Sean A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 los cinco autos, donde cada uno entra por la puerta 1, 2, 3, 4, 5 respectivamente. La siguiente tabla muestra las posibles puertas de salida de los autos A_2, A_3, A_4, A_5 cuando el auto A_1 sale por la puerta 2:

*A*1	*A*2	*A*3	*A*4	*A*5
2	5	1	3	4
2	5	4	3	1
2	5	4	1	3
2	4	1	5	3
2	4	5	3	1
2	4	5	1	3
2	3	5	1	4
2	3	1	5	4
2	3	4	5	1
2	1	4	5	3
2	1	5	3	4

Notemos que cuando A_1 sale por la puerta 2 y A_2 sale por la puerta 1, solamente hay dos alternativas más, pues el auto A_3 no puede salir por la puerta 3, así que por esa puerta solo puede salir A_4 o A_5. Si por la puerta 3 sale A_4, por la puerta 4 sale A_5 ya que A_5 no puede salir por la puerta 5, y si por la puerta 3 sale A_5, por la puerta 4 sale A_3 ya que A_4 no puede salir por la puerta 4.

Luego cuando el auto A_1 sale por la puerta 2 los autos A_2, A_3, A_4, A_5 tienen 11 maneras de salir, análogamente cuando el auto A_1 salga por la puerta 3 los autos A_2, A_3, A_4, A_5 tendrán 11 maneras de salir, cuando el auto A_1 salga por la puerta 4 los autos A_2, A_3, A_4, A_5 tendrán 11 maneras de salir, y cuando el auto A_1 salga por la puerta 5 los autos A_2, A_3, A_4, A_5 tendrán 11 maneras de salir. Por lo tanto los cinco autos tienen $11 \cdot 4 = 44$ maneras de salir de la rotonda.



Problema 70. Un tipo de entero positivo N es más pequeño que la suma de sus tres divisores más grandes (evidentemente, se excluye el mismo número N). ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a. Ese tipo de números son divisibles por 4.
b. Ese tipo de números son divisibles por 5.
c. Ese tipo de números son divisibles por 6.
d. Ese tipo de nímeros son divisibles por 7.
e. No existe ese tipo de números.

Solución. Sean a, b y c los divisores más pequeños de N sin contar a 1, donde $a < b < c$, de este modo $\frac{N}{a}$, $\frac{N}{b}$ y $\frac{N}{c}$, luego:

$$\frac{N}{a} + \frac{N}{b} + \frac{N}{c} > N$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$$

Observemos que como $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$ entonces:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} > 1$$

$$\frac{3}{a} > 1$$

$$3 > a$$

Luego $a = 2$, si $a = 2 \Longrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$, luego siempre:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{b} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{b} > \frac{1}{2}$$

$$4 > b$$

Luego $b = 3$
Por lo tanto sabemos que $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{c} > 1$, luego:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{c} > N$$

$$\frac{1}{1} > N - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{c} > \frac{6 - 3 - 2}{6}$$

$$\frac{1}{c} > \frac{1}{6}$$

$$c < 6$$

Luego $c = 4$ o $c = 5$. De este modo tenemos que los divisores de N son:

- $\frac{N}{2}, \frac{N}{3}$ y $\frac{N}{4} \Longrightarrow N = \frac{13N}{12}$, por lo tanto N debe ser divisible por 12.
- $\frac{N}{2}, \frac{N}{3}$ y $\frac{N}{5} \Longrightarrow N = \frac{31N}{30}$, por lo tanto, N debe ser divisible por 30.

Finalmente, si N es divisible por 12 y por 30, N es divisible por 6.

Problema 71. A partir de una lista de tres números, el procedimiento "cambiasuma" crea una nueva lista mediante la sustitución de cada número por la suma de los otros dos. Por ejemplo, de la lista 3, 4, 6 el "cambiasuma" da 10, 9, 7 y de esta nueva lista el "cambiasuma" da como resultado la lista 16, 17, 19. Si empezamos con la lista 1, 2, 3, ¿Cuántos "cambiasuma" consecutivos son requeridos para obtener el número 2013 en una lista?

Solución. Observemos algunas regularidades que ocurren al realizar el "cambiasuma" para una lista tres números consecutivos $\{n, n+1, n+2\}$.

$$\{n, n+1, n+2\} \xrightarrow{\text{cambia suma}} \{2n+3, 2n+2, 2n+1\}$$
$$\xrightarrow{\text{cambia suma}} \{4n+3, 4n+4, 4n+5\}$$

- Al aplicar el procedimiento de cambia suma para una lista de tres números consecutivos se obtiene una nueva lista de tres números consecutivos.

- Si sumamos los dos números mayores de la primera lista, se obtiene el número mayor de la segunda lista. En el caso de la primera fila los dos números mayores son $n+1$ y $n+2$, que al sumarlos resulta $2n+3$ (el mayor de la segunda fila). Y si sumamos los dos números menores de la primera lista , se obtiene el número menor de la segunda lista. En el caso de la primera fila los dos números menores son n y $n + 1$, que al sumarlos resulta $2n + 1$ (el menor de la segunda fila).

Luego la primera lista es creciente, la segunda lista es decreciente, la tercera lista es creciente, y así sucesivamente.

- El término central de cualquier lista es de la forma $2^k(n + 1)$, donde k es el número de cambiasumas realizados. Lo anterior lo podemos notar en la siguiente lista de términos centrales:

$$n + 1, 2(n + 1), 4(n + 1), \ldots = 2^0(n + 1), 2^1(n + 1), 2^2(n + 1), \ldots$$

Observemos estas regularidades comenzando con la lista pedida en el problema:

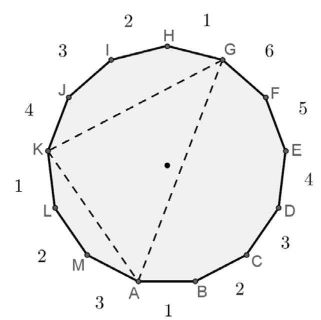
número de cambiasumas	lista		
0	1	2	3
1	5	4	3
2	7	8	9
3	17	16	15
4	31	32	33
⋮	⋮	⋮	⋮
5	1025	1024	1023
6	2047	2048	2049

Observemos que será imposible obtener el número 2013 en alguna lista pues el valor central de la lista es una potencia de 2, y las potencias de 2 más cercanas a 2013 son $2^{10} = 1024$ y $2^{11} = 2048$, y como las listas contienen números consecutivos el 2013 no es antecesor ni sucesor de estas potencias de 2.

Finalmente no es posible obtener 2013 mediante el cambiasuma.

Problema 72. ¿Cuántos triángulos hay, cuyos vértices son escogidos de un polígono regular de trece lados y el centro de la circunferencia circunscrita al polígono quede dentro del triángulo?

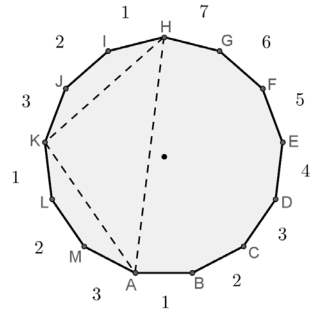
Solución. Dibujemos el polígono regular de 13 lados y uno de los triángulos posibles dentro de él.



Para reconocer este triángulo lo denotaremos por $\triangle(6, 4, 3)$ pues partiendo desde el vértice A en sentido antihorario y recorriendo 6 lados del polígono llegamos al vértice G del triángulo, luego recorriendo 4 lados del polígono y en el mismo sentido llegamos al vértice K, y por último recorriendo los 3 lados restantes del polígono llegamos nuevamente al vértice A.

De este modo podemos construir trece de estos triángulos (13 rotaciones del $\triangle(6, 4, 3)$). Notemos que el polígono tiene un número impar de lados, por lo que ninguna diagonal trazada pasa por el centro.

Siguiendo nuestra lógica de construcción de triángulos, no podremos tener un lado del triangulo mayor a 6 (6 lados del polígono recorridos desde un vértice a otro). En la figura se muestra el $\triangle(7, 3, 3)$ el cuál no cumple la condición de encerrar al centro.



Contemos todos los triángulos cuyos vértices son escogidos del polígono regular de trece lados tal que el centro quede dentro del triángulo. Notemos que $\triangle(6, 1, 6)$ al rotar genera 13 triángulos entre ellos el $\triangle(6, 6, 1)$ y el $\triangle(1, 6, 6)$. El $\triangle(4, 5, 4)$ al rotar genera 13 triángulos entre ellos el $\triangle(5, 5, 4)$ y el $\triangle(4, 5, 5)$. Y el $\triangle(5, 3, 5)$ al rotar genera 13 triángulos entre ellos el $\triangle(5, 5, 3)$ y el $\triangle(3, 5, 5)$.

- Triángulos de la forma $\triangle(6, 1, 6)$ tenemos 13 ($\triangle_{AGH}$, $\triangle_{BHI}$, … , $\triangle_{MFG}$).
- Triángulos de la forma $\triangle(4, 5, 4)$ tenemos 13 ($\triangle_{AEJ}$, $\triangle_{BFK}$, … , $\triangle_{MDI}$).
- Triángulos de la forma $\triangle(5, 3, 5)$ tenemos 13 ($\triangle_{ADI}$, $\triangle_{BEJ}$, … , $\triangle_{MCH}$).

Además el $\triangle(6, 4, 3)$ al rotar genera 13 triángulos entre ellos el $\triangle(3, 6, 4)$ y el $\triangle(4, 3, 6)$. El $\triangle(6, 3, 4)$ al rotar genera 13 triángulos entre ellos el $\triangle(4, 6, 3)$ y el $\triangle(3, 4, 6)$. El $\triangle(6, 2, 5)$ al rotar genera 13 triángulos entre ellos el $\triangle(5, 6, 2)$ y el $\triangle(2, 5, 6)$. Y el $\triangle(6, 5, 2)$ al rotar genera 13 triángulos entre ellos el $\triangle(2, 6, 5)$ y el $\triangle(5, 2, 6)$

- Triángulos de la forma $\triangle(6, 4, 3)$ tenemos 13 ($\triangle_{AGK}$, $\triangle_{BHL}$, … , $\triangle_{MFJ}$).
- Triángulos de la forma $\triangle(6, 3, 4)$ tenemos 13 ($\triangle_{AGJ}$, $\triangle_{BHK}$, … , $\triangle_{MFI}$).
- Triángulos de la forma $\triangle(6, 2, 5)$ tenemos 13 ($\triangle_{AGI}$, $\triangle_{BHJ}$, … , $\triangle_{MFH}$).
- Triángulos de la forma $\triangle(6, 5, 2)$ tenemos 13 ($\triangle_{AGL}$, $\triangle_{BHM}$, … , $\triangle_{MFK}$).

Finalmente existen $13 \cdot 7 = 91$ triángulos con la condición dada.

Problema 73. Un vehículo partió del punto A y anduvo por un camino recto a una velocidad de 50km/h. Luego, a cada hora siguiente un nuevo vehículo parte del punto A a una velocidad 1km/h más rápida que el anterior. El último vehículo (a una velocidad de 100km/h) partió 50 horas después del primero. ¿Cuál es la velocidad del vehículo que va primero en la caravana 100 horas después de que partió el primero?

Solución. El primer vehículo recorre en 100 horas a 50 km/h recorre 5000 km. El segundo vehículo como sale 1 hora más tarde que el primero y va a 51 km/h recorre recorre $51 \cdot 99$ km. El segundo vehículo como sale 1 hora más tarde que el segundo y va a 52 km/h recorre recorre $52 \cdot 98$ km, y así sucesivamente.

Luego el problema consiste en conocer que producto es mayor: $50 \cdot 100, 51 \cdot 99, 52 \cdot 98, 53 \cdot 97, \ldots, 98 \cdot 52, 99 \cdot 51, 100 \cdot 50$

Después de algunos cálculos uno observa que el producto crece hasta ser $75 \cdot 75 = 5625$. Por lo tanto el vehículo que va primero en la caravana 100 horas después de que partió el primero lleva una velocidad de 75 km/h.

Esto también se puede calcular maximizando el producto $(50+x)\cdot(100-x) = 5000+50x-x2$, sabiendo que la función $f(x) = 5000+50x-x2$ describe una parábola que se abre hacia abajo, que tienen como valor máximo su vértice con coordenadas

$$\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) = (25, 75 \cdot 75).$$

Luego $x = 25$ km maximiza la expresión.

Problema 74. Un jardinero quiere plantar veinte árboles (alerces y robles) en una avenida del parque. Sabiendo que entre dos alerces no pueden haber tres árboles. ¿Cuál es el mayor número de alerces que puede plantar el jardinero?

Solución. Como queremos plantar el mayor número de alerces en la avenida, comencemos plantando alerces teniendo en cuenta que no podemos tener 5 alerces consecutivos $A1$ $A2$ $A3$ $A4$ $A5$ donde para el árbol Ai, i indica la posición, pues entre los alerces extremos tenemos 3 árboles. Entonces plantamos 4 alerces y comenzamos a plantar robles.

$A1$ $A2$ $A3$ $A4$ $R5$ $R6$ $R7$ . . .

Pero deseamos tener más alerces por lo que debemos encontrar el momento en que comenzamos a plantar nuevamente alerces. Notemos que en la posición 6 no puede haber un alerce pues entre $A2$ y $A6$ quedarían 3 árboles, en la posición 7 no puede haber un alerce pues entre $A3$ y $A7$ quedarían 3 árboles, en la posición 8 no puede haber un alerce pues entre $A4$ y $A8$ quedarían 3 árboles, luego agregamos robles en las posiciones 6, 7 y 8, y alerces a partir de la posición 9.

$A1$ $A2$ $A3$ $A4$ $R5$ $R6$ $R7$ $R8$ $A9$ $A10$ $A11$ $A13$ . . .

De este modo plantamos 4 alerces, 4 robles, 4 alerces, 4 robles, 4 alerces, así nunca hay tres árboles cualquiera entre dos alerces, por lo tanto podemos plantar hasta 12 alerces.

Problema 75. Iván caminaba por la calle cuando vio un tractor que tiraba de una tubería. Decidiendo medir su longitud Iván caminó al lado de la tubería contra el movimiento del tractor y contó 20 pasos. Luego caminó en la misma dirección que el tractor y contó 140 pasos. Sabiendo que sus pasos miden un metro, Iván fue capaz de conocer la medida de la tubería. ¿Cuánto mide?

Solución. Sea l la longitud del tubo, supongamos además que cuando Iván avanza 1 metro el tractor avanza k metros, así tenemos que:

Cuando Iván caminó 20 metros al lado de la tubería contra el movimiento del tractor, el tractor avanza $20k$ metros, luego

$$l = 20 + 20k$$

Cuando Iván caminó 140 metros en la misma dirección que el tractor, el tractor avanza $140k$ metros. Notemos que el niño es más rápido que el tractor, pues el niño caminando desde el final de la tubería alcanza al tractor, luego

$$l = 140 - 140k$$

De este modo:

$$l = 20 + 20k$$
$$l = 140 - 140k$$

Restando ambas ecuaciones obtenemos que

$$120 - 160k = 0 \Rightarrow 120 = 160k \Rightarrow k = \frac{3}{4}$$

Luego $l = 20 + 20 \cdot \frac{3}{4} = 35$. Por lo que la longitud del tubo es de 35 metros.

Problema 76. ¿Cuál de los siguientes números es el más grande?

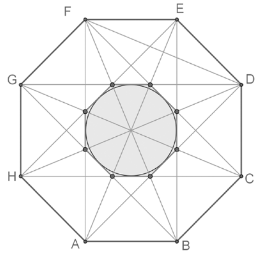
a. 2013 **b.** 2^{0+13} **c.** 20^{13} **d.** 201^3 **e.** $20 \cdot 13$

Solución.

- 2013 tiene 4 dígitos.
- $2^{0+13} = 2^{13} = 2^{10} \cdot 2^3 = 1024 \cdot 8$ tiene 4 dígitos.
- $20^{13} = 2^{13} \cdot 10^{13}$, 2^{13} tiene 4 dígitos, por lo que $2^{13} \cdot 10^{13}$ tiene $4+13 = 17$ dígitos.
- $201^3 = (200 + 1)^3 = 200^3 + 3 \cdot 200^2 + 3 \cdot 200 + 1$ tiene 7 dígitos.
- $20 \cdot 13 = 260$ tiene 3 dígitos.

Luego el número más grande es 20^{13} (sin ser necesario calcular exactamente cada valor).

Problema 77. Los lados del octágono regular de la figura miden 10. ¿Cuál es el radio de la circunferencia inscrita en el octágono regular que muestra la figura?



Solución. Las diagonales CH, DG, AF, BE claramente forman un cuadrado de lado 10 al centro de la figura, y como la circunferencia esta inscrita, esta tiene diámetro 10 y en consecuencia radio 5.

Problema 78. Un prisma tiene 2013 caras. ¿Cuántas aristas tiene el prisma?

Solución. Observemos que si un prisma tiene 2013 caras, 2011 de ellas son laterales y las otras 2 caras son basales. Por lo tanto las caras laterales generan 2011 aristas, y cada cara basal necesariamente tiene una arista por cada cara lateral, luego cada cara basal tiene 2011 aristas, entonces las 2 caras basales generan $2 \cdot 2011$ aristas.

Finalmente el prisma tiene $3 \cdot 2011 = 6033$ aristas.

Problema 79. La raíz cúbica de 3^3 es igual a:

Solución. Notemos que:

$$3^{3^3} = 3^{27} = 3^{9 \cdot 3} = (3^9)^3$$

Esto implica que $\sqrt[3]{(3^9)^3} = 3^9 = 3^{3^2}$

Problema 80. El año 2013 tiene la propiedad de ser un número formado por los dígitos consecutivos 0, 1, 2 y 3. ¿Cuántos años han pasado desde la última vez que un año ha sido formado por 4 dígitos consecutivos?

Solución. Como estamos hablando de dígito,s las posibles parejas de números consecutivos son:

$$\{0, 1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{4, 5, 6, 7\}, \{5, 6, 7, 8\}, \{6, 7, 8, 9\}$$

Como queremos encontrar una combinación que sea menor a 2013, descartamos las parejas:

$$\{2, 3, 4, 5\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{4, 5, 6, 7\}, \{5, 6, 7, 8\} \text{ y } \{6, 7, 8, 9\}$$

Pues con ellas nunca podremos formar un número menor que 2013, así analizamos solo las dos que nos restan, estas son:

$$\{0, 1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}$$

Ahora con estas combinaciones queremos encontrar el número más grande pero menor a 2013. Veamos la combinación $\{0, 1, 2, 3\}$, el número más grande y menor que 2013 que podemos formar con esta combinación es 1320 y con la combinación $\{1, 2, 3, 4\}$ el número más grande y menor que 2013 que podemos formar con esta combinación es 1432. Así el número buscado es 1432, respondiendo a la pregunta esto sucedió hace 581 años

Problema 81. Sea f una función lineal para la cual $f(2013) - f(2001) = 100$. ¿Cuánto es $f(2031) - f(2013)$?

Solución. Sea $f(x) = mx + n$ la función lineal pedida, de este modo:

$$\begin{aligned} f(2013) - f(2001) &= 100 \\ (2013m + n) - (2001m + n) &= 100 \\ 2013m + n - 2001m - n &= 100 \\ 12m &= 100 \\ m &= \frac{100}{12} = \frac{25}{3} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} f(2031) - f(2013) &= (2031m + n) - (2013m + n) \\ &= 2031m + n - 2013m - n \\ &= 18m = 18 \cdot \frac{25}{3} = 150 \end{aligned}$$

Observemos que m puede también puede ser calculada usando los puntos (2013, f(2013)) y (2001, f(2001)), es decir.

$$m = \frac{\text{f}(2013) - \text{f}(2001)}{2013–2001} = \frac{100}{12} = \frac{25}{3}$$

Problema 82. Seis súper héroes capturan a veinte villanos. El primer séper héroe captura un villano, el segundo captura dos villanos y el tercero captura tres. El cuarto súper héroe captura más villanos que cualquiera de los otros cinco héroes. ¿Cuál es el mínimo de villanos que pudo haber capturado el cuarto héroe?

Solución. Como los primeros tres super héroes ya capturaron 1+2+3 = 6 villanos, quedan 14 villanos por capturar. Supongamos que el cuarto super héroe (S_4) captura x villanos, el quinto super héroe (S_5) captura a villanos, el sexto super héroe (S_6) captura b villanos. Es decir:

$$x + a + b = 14, \text{ con la condición que } x > a, x > b$$

Necesariamente $x = 6$. Para probar esto digamos que $a = x - p$ y $b = x - q$, luego:

$$\begin{aligned} x + a + b = x + (x - p) + (x - q) &= 143x - p - q = 14 \\ 3x &= 14 + p + q \end{aligned}$$

De este modo tenemos que $14 + p + q$ es múltiplo de 3, por lo tanto:

- $14+p+q = 15 \Rightarrow p+q = 1$, es decir, $p = 0 \wedge q = 1$, o bien $p = 1 \wedge q = 0$. No se puede pues implicaría que $x = a$ o que $x = b$ y necesariamente $x > a, x > b$.
- $14+p+q = 18 \Rightarrow p+q = 4$, es decir, $p = 1 \wedge q = 3$, o $p = 2 \wedge q = 2$, o $p = 3 \wedge q = 1$, o $p = 4 \wedge q = 0$, o $p = 0 \wedge q = 4$ pero q y p no pueden ser 0.

Luego 6 + 5 + 3 = 14, 6 + 4 + 4 = 14, 6 + 3 + 5 = 14.

También podemos observar que $x = 6$, teniendo en cuenta que como x debe ser pequeño, los valores x, a y b deben ser cercanos a $14 \div 3 = 4.\overline{6}$, podemos elegir entonces $x = 6$, $a = 4$, $b = 4$, o bien, $x = 6$, $a = 5$, $b = 3$.

Problema 83. Cuando cierta sustancia se derrite, su volumen se incrementa en $\frac{1}{12}$ ¿En cuánto decrece su volumen cuando vuelve a solidificarse?

Solución. Notemos que cuando la sustancia S se derrite aumenta su masa en $\frac{1}{12}$, por lo tanto la nueva masa M es $S + \frac{S}{12} = \frac{13S}{12} = M$. Como queremos que esta masa vuelva a solidificarse tendrá que ser nuevamente S, luego la pregunta es en cuanto disminuye M para volver a ser S, se tiene que:

$$\begin{aligned} M - \frac{M}{x} &= S \\ \frac{13S}{12} - \frac{13S}{12x} &= S \\ \frac{13S - 13S}{12x} &= S \\ 13Sx - 13S &= 12Sx \\ Sx &= 13S \\ x &= 13 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el volumen disminuye en $\frac{1}{13}$.

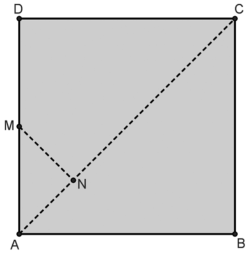
Problema 84. ¿Cuántos enteros positivos existen de manera tal que $\frac{n}{3}$ y $3n$ sean enteros positivos de tres dígitos?

Solución. Como $\frac{n}{3}$ y $3n$ deben ser enteros positivos de tres dígitos, se tiene que:

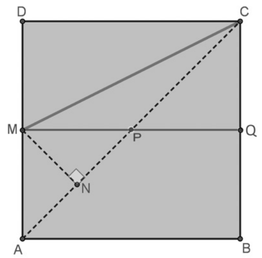
$$\frac{n}{3} \geq 100 \qquad\qquad 3n \leq 999$$
$$n \geq 300 \qquad\qquad n \leq 333$$

Luego $300 \leq n \leq 333$, por lo que existen 34 enteros para los que $\frac{n}{3}$ y $3n$ son enteros positivos de tres dígitos.

Problema 85. En la figura *ABCD* es un cuadrado, *M* es el punto medio de *AD* y MN es perpendicular a *AC*. ¿Cuál es la razón entre el área del triángulo *MNC* y el área del cuadrado original?



Solución. Tal como muestra la figura tracemos la perpendicular al lado *AD* que pasa por el punto *M*. Claramente esta recta divide al cuadrado en dos parte iguales.



Notemos que para el triángulo *MPC* es $\frac{1}{8}$ del área total, pues como *P* es el punto medio del segmento trazado (dado que es el punto medio de la diagonal), el triángulo *MPC* y el triángulo *PQC* tienen la misma base y la misma altura, siendo la suma de estas áreas igual a $\frac{1}{4}$ del área total.

Por otra parte el triángulo *MNP* es $\frac{1}{16}$ del área total.

Luego el área del triángulo *MNC* es $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$ del área del cuadrado original.

Problema 86. El abuelo Anacleto ha escrito los números del 1 al 120 en 15 filas, como se muestra en el diagrama. ¿Cuál de las columnas (de izquierda a derecha) tiene la mayor suma?

1				
2	3			
4	5	6		
…				
106	107	108	…	120

Solución. Sea $S1$ la suma de los 15 números ubicados en la primera columna, observemos que las siguientes columnas se generan a partir de la primera:

1					
2	2+1				
4	4+1	4+2			
7	7+1	7+2	7+3		
…					
106	106+1	106+2	106+3	…	106+14

De este modo tenemos que:

- $S_2 = S_1 + 1 \cdot 14 - 1 = S_1 + 13$
- $S_3 = S_1 + 2 \cdot 13 - 1 - 2 = S_1 + 23$
- $S_4 = S_1 + 3 \cdot 12 - 1 - 2 - 4 = S_1 + 29$
- $S_5 = S_1 + 4 \cdot 11 - 1 - 2 - 4 - 7 = S_1 + 30$
- $S_6 = S_1 + 5 \cdot 10 - 1 - 2 - 4 - 7 - 11 = S_1 + 25$

Así observamos que los valores de S_6, S_7, ..., S_{15} comienzan a decrecer, luego la máxima suma está en la quinta columna.

Problema 87. En veintidós cartas han sido escritos números enteros positivos desde el uno al veintidós. Con estas cartas se han hecho once fracciones. ¿Cuál es la máxima cantidad de dichas fracciones que pueden dar resultados enteros?

Solución. Analicemos los primos del 1 al 22 estos son: {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}, inmediatamente nos damos cuenta que los primos 13, 17 y 19 estando como numerador o como denominador de cualquiera de las once fracciones nos generarán fracciones que no pueden dar resultados enteros, pues el 13, el 17 y el 19 no dividen a ninguno de los veintidós números y no son divididos por ninguno de los veintidós números excepto del uno. Luego sería conveniente elegir dos de estas cartas y hacer una fracción, y la carta que quede, emparejarla con la carta que contiene el uno.

Así entre el {1, 13, 17, 19} solo podremos formar una fracción que de un entero positivo y otra fracción que no de un entero positivo, por ejemplo $\frac{13}{1}$ será la que nos sirve y $\frac{17}{19}$ será la que descartaremos.

De las 11 fracciones que podíamos crear con los números del 1 al 22, ya hemos descartado una de ellas, pues es imposible que nos dé un entero positivo, así también dejemos de lado la fracción $\frac{13}{1}$ pues sabemos que es la única combinación con la cual tomando en cuenta el 13 nos dé fracción igual a un entero positivo.

Ahora intentemos formar las 9 fracciones que resulten ser igual a un entero positivo. Los números que nos quedan por analizar son:

$$\{2, \underline{3}, 4, \underline{5}, 6, \underline{7}, 8, \underline{9}, 10, \underline{11}, 12, \underline{14}, \underline{15}, 16, \underline{18}, 20, \underline{21}, 22\}$$

No hay ningún número de ellos que divida al 11, pero el 11 divide al 22, así que formamos esa pareja, de la misma manera no existe ningún número de la lista que divida a 7, pero el 7 divide al 14, así que formamos esa pareja. Al número 21 solo lo divide el 3 y el 7, pero como ya utilizamos el 7 afirmamos que el 3 divide al 21 así que formamos esa pareja, de igual forma al 15 solo lo divide el 3 y el 5, pero como ya utilizamos el 3, decimos que el 5 divide al 15 así que formamos esa pareja. Como ya tomamos el 3, entonces el 9 no puede ser dividido, luego el 9 divide al 18 así que formamos esa pareja.

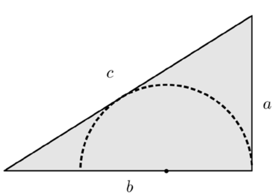
Ahora solo nos quedan los números:

$$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 16, 20\}$$

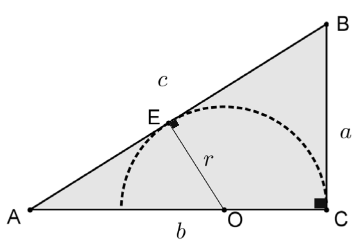
Al 20 lo divide el {2, 4, 10}. Al 16 lo divide el {2, 4, 8}. Al 12 lo divide el {2, 4, 6}. Al 10 lo divide el {2, 5}. Así que podemos emparejar el 10 con 5, el 12 con el 6, el 16 con el 4 y el 20 con el 2.

Finalmente de las 11 fracciones a lo más 10 pueden dar resultados enteros.

Problema 88. La figura siguiente muestra un triángulo rectángulo de lados *a, b* y *c.* ¿Cuál es el radio del semicírculo inscrito?



Solución. Dado el triángulo rectángulo en C de lados a, b, c. Se tiene que $c^2 = a^2 + b^2$, trazamos el radio r de la semi-circunferencia desde el punto O hasta el punto E, que es perpendicular al lado c.



Por el teorema de la tangente se tiene que el lado c queda dividido por E en dos partes, $AE = c - a$ y $EB = a$.

Del mismo modo el lado b queda dividido en dos partes, $AO = (b - r)$ y $OC = r$. Luego se forma un triángulo rectángulo de catetos $(c - a)$ y r e hipotenusa $(b - r)$.

Por pitágoras se tiene que:

$$
\begin{aligned}
(c-a)^2 + r^2 &= (b-r)^2 \\
c^2 - 2ac + a^2 + r^2 &= b^2 - 2br + r^2 \\
2br &= b^2 - c^2 - a^2 + 2ac \\
2br &= (b^2 - c^2) - a^2 + 2ac \\
2br &= -a^2 - a^2 + 2ac \; / \cdot \\
br &= -a^2 + ac \\
r &= \frac{a\,(c-a)}{b}
\end{aligned}
$$

Luego el radio del semi-círculo inscrito es $r = \dfrac{a\,(c-a)}{b}$

De otro modo observemos que el triángulo ABC es semejante al triángulo

OAE, pues $\angle OEA \cong \angle BCA$, $\angle OEA \cong \angle BCA = 90^\circ$ y $\angle OAE \cong \angle BAC$ ya que lo comparten, de este modo podemos establecer las siguientes proporciones:

$$\frac{r}{a} = \frac{c-a}{b}$$

Por lo tanto, $r = \dfrac{a\,(c-a)}{b}$

Problema 89. Andrés y Daniel recientemente tomaron parte en una maratón. Después de terminar, se dieron cuenta que Andrés terminó antes que el doble de personas que terminaron antes que Daniel, y que Daniel terminó antes que 1,5 de los corredores que terminaron antes que Andrés. Si Andrés finalizó en el vigésimo primer lugar. ¿Cuántos corredores compitieron en la maratón?

Solución. Si Andrés finalizó en el lugar número 21, entonces antes de él hay 20 personas más, contando a Andrés hay 21 corredores.

Si Daniel terminó antes que 1, 5 de los corredores que terminaron antes de Andrés, entonces hay 30 corredores después de Daniel, contando a Daniel hay 31 corredores.

Y si Andrés terminó antes que el doble de personas que Daniel, obtenemos la siguiente ecuación:

$$
\begin{aligned}
2x + 1 &= x + 31 \\
2x &= 20 \\
x &= 10
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, después de Andrés hay 20 corredores, más los 20 corredores que hay antes de él tenemos 40 corredores, incluyendo a Andrés hay 41 corredores que compitieron en la maratón.

Problema 90. Julián ha escrito un algoritmo con el fin de crear una secuencia de números como

$$a_1 = 1, \quad a_{m+n} = a_n + a_m + n \cdot m$$

donde m y n son números naturales. Encuentre el valor de a_{2013}

Solución. Comenzemos por encontrar los primeros términos e intentar conseguir una regularidad para ellos:

- $a_1 = 1$
- $a_2 = a_{1+1} = a_1 + a_1 + 1 \cdot 1 = 1 + 1 + 1 = 3$
- $a_3 = a_{2+1} = a_2 + a_1 + 1 \cdot 2 = 3 + 1 + 2 = 6$
- $a_4 = a_{2+2} = a_2 + a_2 + 2 \cdot 2 = 3 + 3 + 4 = 10$
- $a_5 = a_{4+1} = a_4 + a_1 + 4 \cdot 1 = 10 + 1 + 4 = 15$

De los primeros cinco términos de la secuencia, se puede inferir que la diferencia entre el primer término y el segundo es 2. Entre el segundo y el tercer término es 3. Entre el tercer y cuarto término es 4. Entre el cuarto y el quinto término es 5 y así sucesivamente. Ahora bien podemos notar que la diferencia entre el primer término y el cuarto término es la suma de las diferencias de los terminos anteriores desde a1 hasta a4, vale decir que:

$$a_4 - a_1 = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) = 2 + 3 + 4$$

Luego

$$a_4 = a_1 + 2 + 3 + 4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

Realizando la misma operación con el primer y quinto término se puede notar que:

$$a_5 - a_1 = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + (a_5 - a_4) = 2 + 3 + 4 + 5$$

Luego

$$a_5 = a_1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

Notemos que $a_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
Por lo que:

$$a_{2013} = \frac{2013 \cdot (2013 + 1)}{2} = \frac{2013 \cdot 2014}{2} = 2027091$$

Luego el valor del número buscado a_{2013} es 2027091.

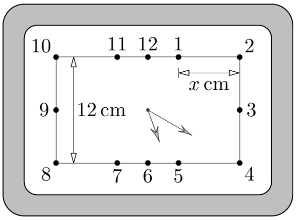
Otro camino es buscar una recurrencia alternativa al algoritmo $a_{m+n} = a_n + a_m + n \cdot m$, observemos el caso particular con $n = 1$

$$a_{m+1} = a_m + a1 + 1 \cdot m$$
$$a_{m+1} = a_m + 1 + m$$
$$a_{m+1} = a_m + (m + 1) \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

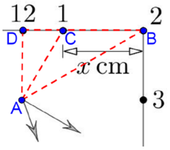
Por lo tanto:

$$\begin{aligned} a_{2013} &= a_{2012} + 2013 \\ &= a_{2011} + 2012 + 2013 \\ &= a_{2010} + 2011 + 2012 + 2013 \\ \ldots \\ &= 1 + 2 + 3 + \ldots + 2013 \\ &= \frac{2013 \cdot (2013 + 1)}{2} \\ &= \frac{2013 \cdot 2014}{2} = 2027091 \end{aligned}$$

Problema 91. El reloj del dibujo es rectangular, cada manecilla se mueve a una velocidad constante, como un reloj normal (circular). Si la distancia entre los números 8 y 10 es de 12 cm. Calcular la distancia entre 1 y 2.



Solución. Notemos que si cada manecilla se mueve a una velocidad constante entonces la manecilla menor avanza 30º por cada hora, por lo que $\angle BAC = \angle CAD = 30º$.



Además, el triángulo ACD por construcción es rectángulo en D con lado $AD = 6$cm, por ser un triángulo con ángulos de 30º, 60º y 90º se tiene que $DC = 2\sqrt{3}$ y $AC = 4\sqrt{3}$.

Por otra parte, el triángulo ABC es isósceles pues $\angle ABC = \angle CAB = 30º$. Luego:

$$x = AC = 4\sqrt{3}$$

Problema 92. Todos los boletos para la primera fila de una función de cine están vendidos. Las sillas están numeradas consecutivamente comenzando desde el 1. Pero al cine llegaron dos personas más con entradas falsificadas para sillas numeradas consecutivamente. La suma de los números de los boletos recaudadas es igual a 857. ¿Cuáles son los posibles números de los boletos falsificados?

Solución. Supongamos que se han vendido n boletos donde los boletos k y $k+1$ son falsos, es decir:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + k + (k+1) = 857$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + k + (k+1) = 857$$

De modo que $\dfrac{n(n+1)}{2} < 857$:

- $n = 41 \Longrightarrow \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{41 \cdot 42}{2} = 861 > 857$ No sirve.
- $n = 40 \Longrightarrow \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{40 \cdot 41}{2} = 820 < 857$

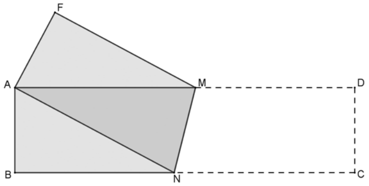
  Sirve, pues $857 - 780 = 77 = 38 + 39$.
- $n = 39 \Longrightarrow \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{39 \cdot 40}{2} = 780 < 857$

  Sirve, pues $857 - 820 = 37 = 18 + 19$.
- $n = 38 \Longrightarrow \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{38 \cdot 39}{2} = 741 < 857$ No sirve, pues

857−741 = 116, y 116 es par, luego, no puede ser suma de dos consecutivos.

Finalmente, las entradas falsificadas son de las sillas 18 y 19, o bien, de las sillas 38 y 39.

Problema 93. Un pedazo de papel rectangular $ABCD$ que mide 4cm × 16cm se dobla sobre la recta MN de tal forma que el vértice C coincida con el vértice A, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área del pentágono $ABNMF$?



Solución. En la figura, $AF = 4$, pues AF corresponde al lado DC antes de hacer el doblez, $AB = 4$, por ser un lado del papel rectangular. Se sabe también que $AD = BC = 16$. Como el vértice C coincide con el vértice A y N está ubicado en el lado BC, se tiene que $BN + AN = 16$. Del mismo modo $AM + FM = 16$ pues F debe coincidir con D al igual como lo hace A con C. Finalmente se puede notar que el área del pentágono $ABNMF$ corresponde a la suma de las áreas del triángulo rectángulo AFM recto en F y el trapecio rectángulo $ABNM$.

Como en el triángulo AFM recto en F, $AF = 4$ y $AM + FM = 16$, entonces $AM = 16 - FM$, por teorema de pitágoras se tiene:

$$\begin{aligned} AF^2 + FM^2 &= AM^2 \\ 4^2 + FM^2 &= (16 - FM)^2 \\ 16 + FM^2 &= 256 - 32FM + FM^2 \\ 32FM &= 240 \\ FM &= \frac{15}{2} \end{aligned}$$

Luego como $FM = \frac{15}{2}$, entonces $AM = 16 - \frac{15}{2} = \frac{17}{2}$. Por lo tanto:

$$A_{\Delta AFM} = \frac{AF \cdot FM}{2} = \frac{4 \cdot \frac{15}{2}}{2} = 15\text{cm}^2$$

Para el triángulo ABN recto en B, con $AB = 4$ y sabiendo que $BN + AN = 16$, se obtiene (por teorema de pitágoras) lo siguiente:

$$\begin{aligned} AB^2 + BN^2 &= AN^2 \\ 4^2 + BN^2 &= (16 - BN)^2 \\ 16 + BN^2 &= 256 - 32BN + BN^2 \\ 32BN &= 240 \\ BN &= \frac{15}{2} \end{aligned}$$

Luego, como $BN = \frac{15}{2}$, se tiene que $AN = \frac{17}{2}$. Por lo que el área del trapecio isósceles $ABNM$ de bases AM y BN, con lado perpendicular AB es:

$$\begin{aligned} \text{área trapecio } &= \frac{Base1 + Base2}{2} \cdot Altura \\ &= \frac{(AM + BN) \cdot AB}{2} \\ &= \frac{(\frac{17}{2} + \frac{15}{2}) \cdot 4}{2} = 32\text{cm}^2 \end{aligned}$$

Finalmente el área del pentágono $ABNMF = 32 + 15 = 47\text{cm}^2$

Problema 94. Después de una lección de Álgebra, lo siguiente quedó en la pizarra: el gráfico de la función $y = x^2$ y 2013 rectas paralelas a la recta $y = x$ que cortan al eje y en $1, 2, \ldots, 2013$, cada una de las cuales intersecta al gráfico en dos puntos generando 4026 puntos. Calcular la suma de las ordenadas de estos puntos de intersección de las rectas y la parábola.

Solución. Notemos que toda recta paralela a la recta $y = x$ es de la forma $Ln : y = x + n$, y como Ln corta la parábola $y = x2$, $n = 1, 2, \ldots 2013$.

Encontremos ahora las ordenadas de los puntos de intersección de las rectas con la parábola despejando la variable y de dichas ecuaciones:

- $y = x2 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{y}$
- $y = x + n \Longrightarrow x = y - n$

Igualando estas ecuaciones se tiene:

$$\begin{aligned} \pm\sqrt{y} &= y - n \qquad /()^2 \\ y &= y^2 - 2ny + n^2 \\ y^2 - (2n+1)y + n^2 &= 0 \end{aligned}$$

Luego:

$$y_1 = \frac{2n + 1 + \sqrt{(2n+1)^2 - 4n^2}}{2}, \quad y_2 = \frac{2n + 1 - \sqrt{(2n+1)^2 - 4n^2}}{2}$$

De este modo se tiene que $y_1 + y_2 = 2 \cdot \dfrac{2n+1}{2} = 2n + 1$

Sumando las ordenadas para $n = 1, 2, ..., 2013$, se tiene:

$$\begin{aligned} S &= (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) + \ldots + (2 \cdot 2012 + 1) + (2 \cdot 2013 + 1) \\ S &= 3 + 5 + \ldots + 4025 + 4027 = 4056195 \end{aligned}$$

Una forma de hacer esta última suma es sumar dos veces este valor que

obtuvimos pero considerando uno de ellos de forma inversa como se indica:

$$\begin{aligned} S &= 3 + 5 + 7 + \ldots + 4023 + 4025 + 4027 \\ + S &= 4027 + 4025 + 4023 + \ldots + 7 + 5 + 3 \\ \hline \end{aligned}$$

Sumando término a término se obtiene que:

$$2 \cdot S = \underbrace{(4030 + 4030 + 4030 + \ldots + 4030 + 4030 + 4030)}_{\text{(2013 veces)}}$$

Luego $2 \cdot S = 4030 \cdot 2013$, lo cual nos conduce a que:

$$S = \frac{4030 \cdot 2013}{2} = 4056195$$

Problema 95. El abuelo Anacleto matemático jubilado y aventurero suma los primeros n enteros positivos (consecutivos) hasta obtener un número de 3 dígitos donde todos los dígitos son iguales. ¿Cuántos números sumó el abuelo?

Solución. Sea aaa el número de tres dígitos con todas sus cifras iguales, sabiendo que la suma de los n primeros términos es $\frac{n(n+1)}{2}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{n(n+1)}{2} &= aaa \\
\frac{n(n+1)}{2} &= 100a + 10a + a \\
\frac{n(n+1)}{2} &= 111a \\
n(n+1) &= 222a
\end{aligned}$$

Como n $(n + 1)$ representa la multiplicación de dos números consecutivos, entonces cabe descomponer $222a$ en factores primos y elegir un cierto a que cumpla con que $222a$ sea la multiplicación de dos números consecutivos. En efecto sucede que $222a = 37 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a$, como a es un dígito, este puede tomar valores desde 0 hasta 9. Luego consideremos a 37 como uno de los dos términos consecutivos, por lo cual $2 \cdot 3 \cdot a$ debe ser 38 o 36.

Para el caso de $2 \cdot 3 \cdot a = 38$, se tiene que $a = \frac{19}{3}$, por lo que $\frac{19}{3}$ no es solución, puesto que no es un dígito.

Para el caso de $2 \cdot 3 \cdot a = 36$, se tiene que $a = 6$, por lo que 6 si es solución.

Luego se tiene que $n(n + 1) = 37 \cdot 36$, lo cual implica que $n = 36$ y $n + 1 = 37$. Por lo tanto el abuelo Anacleto sumó una cantidad de 36 números.

También podemos resolver el problema de otro modo, pues sabemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{n(n+1)}{2} &= 100a + 10a + a \\
\frac{n(n+1)}{2} &= 111a \\
n(n+1) &= 222a \\
n^2 + n - 222a &= 0 \\
n &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 888a}}{2}
\end{aligned}$$

De esta manera, para que n sea entero, $\sqrt{1 + 888a}$ debe ser entero con $a = 1, 2, ..., 9$. Comencemos descartando algunos casos de a sabiendo que el ultimo dígito de un cuadrado perfecto termina en 1, 4, 5, 6 o 9, en nuestro caso el último dígito de $1 + 888a$ es también el último dígito de $8a + 1$, de este modo tenemos que:

- Si $a = 1$, el último dígito de $8a + 1$ es 9
- Si $a = 2$, el último dígito de $8a + 1$ es 7
- Si $a = 3$, el último dígito de $8a + 1$ es 5
- Si $a = 4$, el último dígito de $8a + 1$ es 3
- Si $a = 5$, el último dígito de $8a + 1$ es 1
- Si $a = 6$, el último dígito de $8a + 1$ es 9
- Si $a = 7$, el último dígito de $8a + 1$ es 7
- Si $a = 8$, el último dígito de $8a + 1$ es 5
- Si $a = 9$, el último dígito de $8a + 1$ es 3

Por lo que descartamos $a = 2$, $a = 4$, $a = 7$, $a = 9$ y probamos con $a = 1$, $a = 3$, $a = 5$, $a = 6$, $a = 8$, obteniendo que $\sqrt{1 + 888a}$ es entero solo cuando $a = 6$. Finalmente, con $a = 6$ se tiene que $n = 36$.

Problema 96. Los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y 10 están escritos alrededor de un círculo en orden arbitrario. Sumamos todos los números con sus vecinos, obteniendo diez sumas. ¿Cuál es el máximo valor posible para la más pequeña de estas sumas?

Solución. Notemos que cada uno de estos números se encontrará en 3 de cada una de estas 10 sumas, por ejemplo si tenemos la secuencia ..., 7, 2, 5, 9, 6, … el 5 está en la suma $7 + 2 + 5$, $2 + 5 + 9$ y $5 + 9 + 6$, o sea en tres sumas.

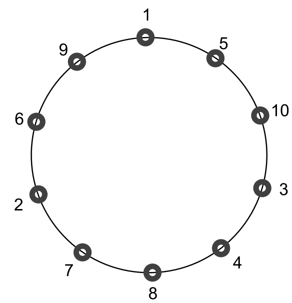
Luego, si sumamos los resultados de cada una de las 10 sumas obtendremos $3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) = 3 \cdot 55 = 165$. Esto quiere decir que los tríos en promedio suman 16, 5. Por lo tanto el máximo valor posible para la más pequeña de estas sumas es menor que 17.

Primeramente, podemos analizar si el máximo valor posible para la más pequeña de estas sumas puede ser 16, para esto deberíamos tener 5 tríos que sumen 16 cada uno y 5 tríos que sumen 17 cada uno pues el promedio es 16, 5, además como los números no se pueden repetir no pueden haber sumas consecutivas iguales, es decir, si la primera suma de a1 + a2 + a3 es 16, a2 + a3 + a4 debe ser igual a 17, de lo contrario a1 sería igual a a4.

De este modo podemos intentar probar algunos casos (5 en total) donde se cumpla lo anterior, dándonos cuenta que es imposible. Probemos ahora si el máximo valor posible para la más pequeña de estas sumas es 15, de este modo son muchos los casos pues las sumas pueden ser 15, 16, 17, 18, 19 ya que por ejemplo:

$$\begin{aligned} 16{,}5 &= \frac{15 + 16 + 16 + 16 + 16 + 17 + 17 + 17 + 17 + 18}{10} \\ &= \frac{15 + 15 + 15 + 16 + 16 + 17 + 17 + 17 + 18 + 19}{10} \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Por lo que podríamos probar varios casos e intentar lograr que el máximo valor posible para la más pequeña de las sumas sea 15. Así por ejemplo se puede encontrar la secuencia mostrada en la figura mostrando que el 15 si es el máximo valor posible.



Problema 97. ¿Cuántos enteros positivos son múltiplos de 2013 y tienen exactamente 2013 divisores (incluyendo a 1 y al mismo número)?

Solución. Analicemos a modo de ejemplo la cantidad de divisores de 600 incluyendo a 1 y al mismo número.

$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$, vemos que cualquier combinación de productos entre estos factores será un divisor de 600, por ejemplo 2 divide a 600, $1 \cdot 3$ divide a 600, $2 \cdot 3$ divide a 600, $3 \cdot 5$ divide a 600, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ divide a 600, etc. Entonces debemos encontrar cuántas combinaciones son formadas con dichos factores.

- 2^3 aporta 4 factores, 2^0, 2^1, 2^2 y 2^3 (3 + 1 factores, donde 3 es el exponente de 2).
- 3 aporta 2 factores, 3^0 y 3^1 (1+1 factores, donde 1 es el exponente de 3) .
- 5^2 aporta 3 factores, 5^0, 5^1 y 5^2 (2+1 factores, donde 2 es el exponente de 5) .

Por lo tanto todas las combinaciones posibles entre estos factores son $(3 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (2 + 1) = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ combinaciones, es decir, 200 tiene 24 divisores.

Realizamos la explicación anterior con el propósito de ayudar a entender el teorema de la descomposición prima de un número compuesto y relacionarla con su número de divisores, el cual no demostraremos, pues no es el propósito de este apunte.

De este modo tenemos que si n es un número compuesto se puede escribir de la siguiente manera:

$$n = p_1^{a1} \cdot p_2^{a2} \cdot p_3^{a3} \cdot \ldots \cdot p_k^{ak}$$

Donde $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ son primos, y $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ son naturales. Luego la cantidad de divisores de n está dada por:

$$(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot (a_3 + 1) \cdot \ldots \cdot (a_k + 1)$$

Como 2013 = 3 · 11 · 61, los enteros positivos que tienen exactamente 2013 divisores son de la forma:

$$p_1^{\,2} \cdot p_2^{\,10} \cdot p_3^{\,60}$$

Por otra parte, no interesa conocer todos los enteros de la forma $p_1^{\,2} \cdot p_2^{\,10} \cdot p_3^{\,60}$ que sean múltiplos de 2013, para que esto se cumpla $p_1^{\,2} \cdot p_2^{\,10} \cdot p_3^{\,60}$ debe contener a 2013 y por lo tanto a su descomposición prima, de este modo los enteros que cumplen con ser múltiplos de 2013 y tener exactamente 2013 divisores son :

- $3^2 \cdot 11^{10} \cdot 61^{60} = 3 \cdot 11 \cdot 61 \cdot (3 \cdot 11^9 \cdot 61^{59}) = 2013 \cdot (3 \cdot 11^9 \cdot 61^{59})$
- $3^2 \cdot 61^{10} \cdot 11^{60} = 3 \cdot 11 \cdot 61 \cdot (3 \cdot 61^9 \cdot 11^{59}) = 2013 \cdot (3 \cdot 61^9 \cdot 11^{59})$
- $11^2 \cdot 3^{10} \cdot 61^{60} = 3 \cdot 11 \cdot 61 \cdot (11 \cdot 3^9 \cdot 61^{59}) = 2013 \cdot (11 \cdot 3^9 \cdot 61^{59})$
- $11^2 \cdot 61^{10} \cdot 3^{60} = 3 \cdot 11 \cdot 61 \cdot (11 \cdot 61^9 \cdot 3^{59}) = 2013 \cdot (11 \cdot 61^9 \cdot 3^{59})$
- $61^2 \cdot 11^{10} \cdot 3^{60} = 3 \cdot 11 \cdot 61 \cdot (61 \cdot 11^9 \cdot 3^{59}) = 2013 \cdot (61 \cdot 11^9 \cdot 3^{59})$
- $61^2 \cdot 3^{10} \cdot 11^{60} = 3 \cdot 11 \cdot 61 \cdot (61 \cdot 3^9 \cdot 11^{59}) = 2013 \cdot (61 \cdot 3^9 \cdot 11^{59})$

Luego existen 6 números enteros que cumplen con ser múltiplos de 2013 y tener exactamente 2013 divisores.

Problema 98. Juan elige un entero positivo de 5 cifras y borra uno de sus dígitos para convertirlo en un número de 4 cifras. La suma de este número de 4 cifras con el número de 5 cifras es 52713. ¿Cuál es la suma de los dígitos del número original de 5 cifras?

Solución. Escribamos el número de cinco cifras como abcde, donde cada una de las letras representa un número del 0 al 9. Si analizamos el enunciado, nos encontramos con cinco casos según sea la letra que se elimine.

Si eliminamos el dígito a, de acuerdo a la condición se tiene que *abcde* + *bcde* = 52713, lo cual es una contradicción pues al sumar las cifras de las unidades (e) esta suma es par ($2e$), y como e es entero $2e \neq 3$. Lo mismo ocurre si eliminamos el dígito b, c o d. Luego el único caso posible es eliminar el dígito e. Por lo tanto, *abcde* + *abcd* = 52713.

Reescribiendo la suma de los números en potencias de 10, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} abcde + abcd &= 52713 \\ (10000a + 1000b + 100c + 10d + e) + (1000a + 100b + 10c + d) &= 52713 \\ 11000a + 1100b + 110c + 11d + e &= 52713 \end{aligned}$$

Analizamos el valor más próximo a 52713. Por simple intuición $a = 4$, pues para $a \geq 5$ tendremos un valor mayor o igual a 55000. Luego $52713 - 4 \cdot 11000 = 52713 - 44000 = 8713$. Por lo tanto:

$$1100b + 110c + 11d + e = 8713$$

Ahora $b = 7$, pues para $b = 8$ excedemos el valor 8713. Luego $8713 - 7700 = 1013$. Por lo tanto:

$$110c + 11d + e = 1013$$

Ahora $c = 9$, pues es el valor más próximo a 1013. Luego $1013 - 990 = 23$. Ahora bien,

$$11d + e = 23$$

Luego, $d = 2$, pues para $d = 3$ excedemos el valor 23. En consecuencia, $e = 1$. Por lo tanto, el número buscado es 47931. Finalmente, la suma de sus dígitos es $4 + 7 + 9 + 3 + 1 = 24$.

Problema 99. En una isla solo habían dos tipos de personas, los caballeros (que siempre dicen la verdad) y los bribones (que siempre mienten). Conocí dos hombres que vivían allí y le pregunté al más alto si ambos eran caballeros. El respondió, pero no pude darme cuenta de que era cada uno, así que le pregunté al hombre más bajo si el más alto era caballero. Me respondió, y después de eso supe que tipo era cada uno. ¿Eran caballeros o bribones?

a. Ambos eran caballeros.
b. Ambos eran mentirosos.
c. El más alto era caballero y el más bajo era mentiroso.
d. El más alto era mentiroso y el más bajo era caballero.
e. No se da suficiente información.

Solución. Analicemos primero la respuesta del hombre más alto. Si su respuesta hubiera sido NO, entonces necesariamente se trataba de un caballero, pues si él era un bribón, la respuesta verdadera es que no eran ambos caballeros. Por lo tanto, necesariamente el hombre más alto respondió Sí a la pregunta ¿son ambos caballeros?

Así, no es posible determinar qué tipo es cada hombre. Si el hombre más alto era caballero, entonces el más bajo también. Por el contrario, si el hombre más alto era bribón, no podemos saber qué tipo era el más bajo.

Analicemos ahora la respuesta del hombre más bajo. Supongamos que respondió SÍ. Si se trataba de un caballero, entonces dijo la verdad, y ambos eran caballeros. Si por el contrario, el hombre era un bribón, mintió, luego el hombre más alto también era bribón. Así, si la respuesta del hombre más bajo fue SÍ, no podemos saber qué tipo es cada uno.

En cambio, si el hombre más bajo respondió NO, y era un bribón, entonces, como miente, el hombre alto es un caballero, lo que contradice la respuesta Sí del hombre más alto. Ahora, si respondió NO y es un caballero, entonces el hombre más alto es un bribón.

Luego, necesariamente las respuestas fueron Sí a la primera pregunta y NO a la segunda, con lo cual, el hombre más alto era un bribón y el más bajo, un caballero.

Problema 100. Un cubo esta ubicado en el espacio de manera tal que tres de sus vértices (no todos sobre la misma cara) son

Solución. Consideremos lo siguiente, en un cubo se pueden encontrar tres diferentes distancias, la distancia de dos vértices consecutivos (el lado de una cara), la distancia de dos vértices opuestos en una misma cara (la diagonal de una cara) y

$P(3, 4, 1)$, $Q(5, 2, 9)$ y $R(1, 6, 5)$. Encuentra el centro del cubo.

finalmente la distancia de dos vértices opuestos que no están en una misma cara (la diagonal del cubo), donde se cumple la siguiente condición.

Lado de una cara < Diagonal de una cara < Diagonal del cubo

Además, el centro de un cubo se encuentra en el punto medio de la diagonal del cubo. Ahora bien, como los puntos *P, Q* y *R* no están todos sobre la misma cara, deberíamos hallar al menos dos de las distancias mencionadas anteriormente. Para ello procederemos a calcular la distancia entre los puntos *P* y *Q, Q* y *R, P* y *R*.

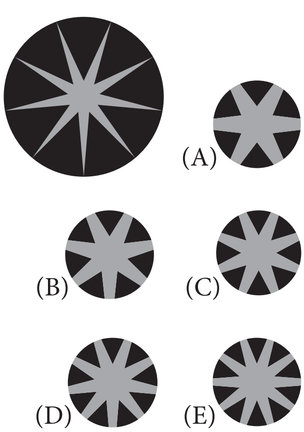
$$\begin{aligned}
D_{PQ} &= \sqrt{(3-5)^2 + (4-2)^2 + (1-9)^2} \\
&= \sqrt{4 + 4 + 64} \\
&= \sqrt{72} \\
D_{QR} &= \sqrt{(5-1)^2 + (2-6)^2 + (9-5)^2} \\
&= \sqrt{16 + 16 + 16} \\
&= \sqrt{48} \\
D_{PR} &= \sqrt{(3-1)^2 + (4-6)^2 + (1-5)^2} \\
&= \sqrt{4 + 4 + 16} \\
&= \sqrt{24}
\end{aligned}$$

Luego, $D_{PR} = \sqrt{24} < D_{QR} = \sqrt{48} < D_{PQ} = \sqrt{72}$.

Por lo tanto, $\overline{PR}$ = lado de una cara, $\overline{QR}$ = diagonal de una cara y $\overline{PQ}$ = diagonal del cubo. Calculando el punto medio de la diagonal del cubo, obtenemos su centro:

$$Centro = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{4+2}{2}, \frac{1+9}{2} \right)$$

Problema 101. ¿Qué dibujo es la parte central de la estrella que se muestra en la imagen?



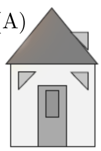
Solución. Debemos contar las puntas de la estrella, en este caso, la estrella tiene 9 puntas, por lo tanto la parte central de la estrella se muestra en la alternativa (D).

Problema 102. Juan quiere insertar el dígito 3 en algún lugar del número 2014. ¿Dónde se debe insertar el dígito 3 si el quiere que su número de cinco dígitos sea lo más pequeño posible?

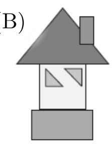
Solución. Lógicamente no es conveniente insertar el número 3 antes del 2014, pues 3 es mayor que 2. Del mismo modo no conviene insertar el número entre el 2 y el 0, pues 3 es mayor que 0. Tampoco conviene insertar el número entre el 0 y el 1, pues 3 es mayor que 1. Como 3 es menor que 4, entonces debemos insertar el número entre el 1 y el 4.

Problema 103. ¿Qué pareja de casas fueron hechas usando exactamente las mismas piezas de forma triangular o rectangular?

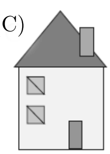
(A)



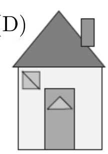
(B)



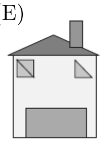
(C)



(D)



(E)



Solución. Descartamos la casa de la alternativa (C), pues es la única que tiene 2 , las que se componen por 2 pares de , además es la única que tiene dos piezas de la forma .

Descartamos la alternativa (B) y (E) pues tienen 2 piezas únicas que no se repiten en las demás casas. Por lo tanto (A) y (D) fueron construidas con las mismas piezas.

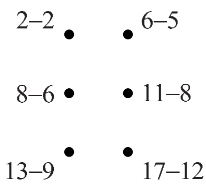
Problema 104. Cuando Koko el Koala no duerme, come 50 gramos de hojas por hora. Ayer, él durmió durante 20 horas. ¿Cuántos gramos de hojas comió ayer?

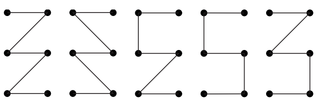
Solución. Como un día tiene 24 horas, Koko durmió 20 horas y se mantuvo despierto 4 horas, como Koko come 50 gramos de hojas cuando no duerme, en 4 horas comerá $50 \cdot 4 = 200$ gramos de hojas.

Problema 105. Alicia tiene 10 nietos. Fernanda es la mayor. Un día la abuela se da cuenta que sus nietos tienen todos edades distintas. Si la suma de las edades de sus nietos es 180, ¿Cuál es la edad mínima que Fernanda puede tener?

Solución. Si dividimos 180 en 10 obtenemos 18, es decir el promedio de las edades de los nietos es 18, de este modo las edades de los nietos que minimizan la edad de Fernanda serán 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, por lo tanto la edad mínima de Fernanda será de 23 años.

Problema 106. María realiza 6 restas y obtiene como resultados los números desde el 0 al 5. Ella une los puntos de menor a mayor, comenzando en el punto con el resultado 0 y terminando en el punto con el resultado 5. ¿Cuál figura ella obtiene?





(A) (B) (C) (D) (E)

Solución. Restando se tiene:

$2-2=0$ • • $6-5=1$

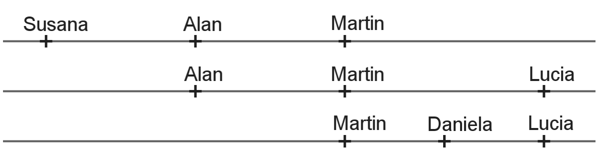
$8-6=2$ • • $11-8=3$

$13-9=4$ • • $17-12=5$

Uniendo los puntos desde 0 a 5 se obtiene la figura (A).

Problema 107. Alan construyó menos castillos de arena que Martín, pero más que Susana. Lucía construyó más castillos que Alan y que Martín. Daniela construyó más castillos que Martín y menos que Lucía. ¿Quién de ellos construyó más castillos de arena?

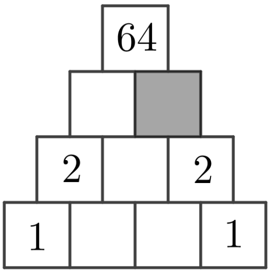
Solución. Podemos ordenar los datos en el siguiente esquema:

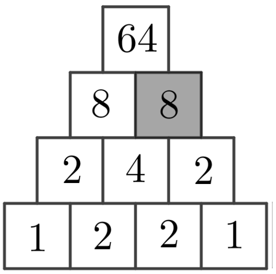


Concluyendo que Lucía fue la que construyó la mayor cantidad de castillos.

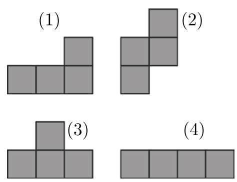
Problema 108. Mónica escribe números en el diagrama de manera que cada número sea el producto de los dos números de abajo. ¿Qué número debería escribir en la celda gris?

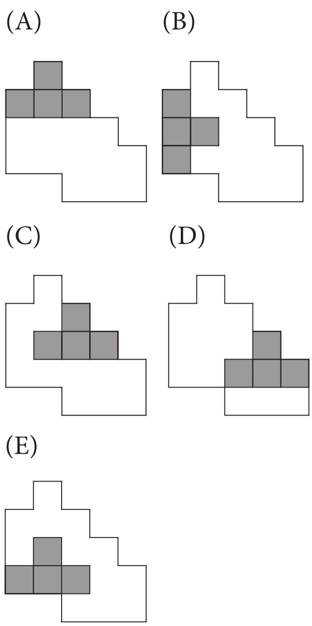
Solución. Completamos el diagrama desde abajo hacia arriba, claramente las dos casillas en blanco de abajo deben ser completadas con números 2, pues $1 \cdot 2 = 2$. Luego en la siguiente fila la casilla vacía corresponde a un 4, pues $2 \cdot 2 = 4$, finalmente se tiene que la casilla gris es $2{\cdot}4 = 8$



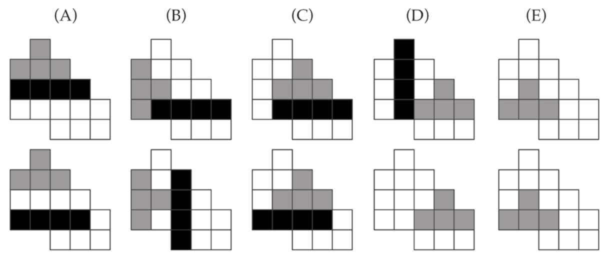


Problema 109. Ana tiene cuatro piezas, las cuales se muestran en la imagen. Con esas piezas ella puede cubrir completamente solo una de las siguientes figuras. ¿Cuál de las siguientes ella puede cubrir con todas sus piezas?

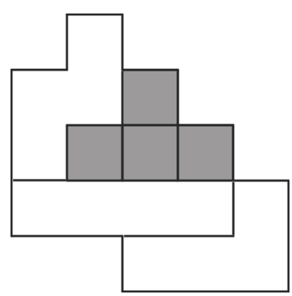




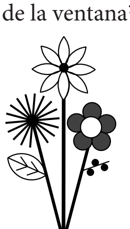
Solución. Notemos que en (A), la pieza (4) tiene solo una posición, descartamos todas las otras posturas pues necesitaríamos dos piezas (4), ubicamos la pieza (4) inmediatamente debajo de la pieza (3), quedando obligados a colocar debajo de la pieza (4) la pieza (1), siendo imposible completar la figura con la pieza (2). En (B) tenemos dos posiciones para la pieza (4) una horizontal y una vértical, cualquiera de las dos posiciones nos impide seguir colocando piezas. En (D) es imposible rellenar con alguna de las piezas las tres casillas que están abajo. (E) no se puede ubicar la pieza (4), por lo que descartamos esta alternativa.



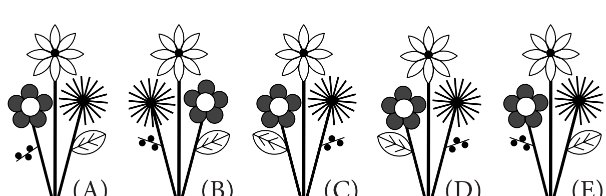
Luego solamente se pueden poner todas las piezas en la figura (C), como se muestra a continuación:



Problema 110. Bruno ha pintado flores en la ventana de la tienda (mire la figura). ¿Cómo se verán estas flores desde el otro lado de la ventana?



Solución. Desde el otro lado de la ventana, la flor que está a la izquierda se verá a la derecha, y la flor que está a la derecha se verá a la izquierda, esto es equivalente a rotar la figura en 180º en torno de la flor central, por lo que que el ramo se verá como muestra la alternativa (E).



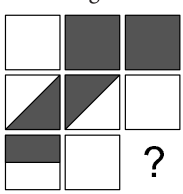
Problema 111. Había algunos dulces en un frasco. Sara tomó la mitad de los dulces y Juan tomó la mitad de los dulces restantes en el frasco. Después de eso, Clara tomó la mitad de los dulces que quedaban. Al final, quedaron 6 dulces en el frasco. ¿Cuántos dulces había en el frasco al comienzo?

Solución. Como quedaron 6 dulces, cuando Clara fue a sacar dulces, había el doble de estos, es decir $6 \cdot 2 = 12$. Cuando Tomas fue a sacar dulces, había el doble de 12, es decir $12 \cdot 2 = 24$. Cuando Sara fue a sacar dulces, había el doble de 24, es decir $24 \cdot 2 = 48$. Por lo tanto al comienzo había 48 dulces en el frasco.

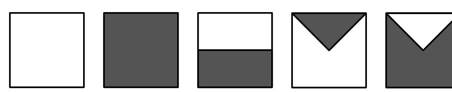
De otro modo, supongamos que x es el número de dulces que había en el frasco, pudiendo expresar el problema con la siguiente ecuación:

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 6 \Rightarrow x = 48$$

Problema 112. ¿Cuál de las siguientes baldosas debe ser agregada en la imagen para que el área blanca sea tan grande como el área negra?



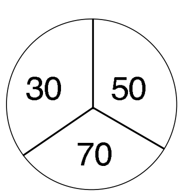
Solución. Las dos primeras filas son equivalentes pues en ellas hay 2 baldosas blancas, 2 baldosas negras y 2 baldosas con mitad blanca y mitad negra, de modo que analizamos la última fila, en la cual debemos agregar una baldosa completamente negra para compensar la baldosa blanca. Luego agregamos la baldosa (B).



(A) (B) (C) (D) (E)

Problema 113. Paula dispara flechas al objetivo que se muestra en la figura. Cuando ella no acierta al objetivo, obtiene cero puntos. Paula dispara dos flechas y suma el puntaje de ambos disparos. ¿Cuál de las siguientes sumas no puede ser su puntaje?

a. 60
b. 70
c. 80
d. 90
e. 100

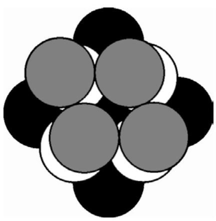


Solución. Observemos que:

- 60 = 30 + 30
- 70 = 70 + 0
- 80 = 50 + 30
- 100 = 50 + 50 = 70 + 30

90 no se puede escribir como suma de dos de los números dados con y sin repetir, luego, Paula no pudo haber obtenido 90 puntos.

Problema 114. María tenía el mismo número de fichas grises, negras y blancas. Ella utilizó algunas de estas fichas para hacer una pila. En la figura, se pueden ver todas las fichas que utilizó. Ella todavía tiene cinco fichas que no están en la pila. ¿Cuántas fichas negras tenía al principio?



Solución. Como muestra la figura, María ha utilizado 5 fichas negras, 4 fichas blancas y 4 fichas grises, se tiene que

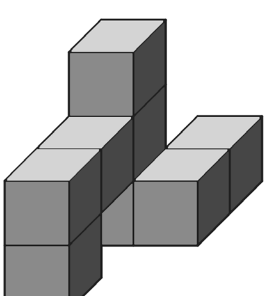
$$5 + 4 + 4 = 13 \text{ fichas.}$$

Además, María aún tiene 5 fichas en la mano, por lo que podemos concluir que originalmente tenía 18 fichas y como tiene el mismo número de fichas de cada color, se concluye que originalmente tenía 6 fichas negras.

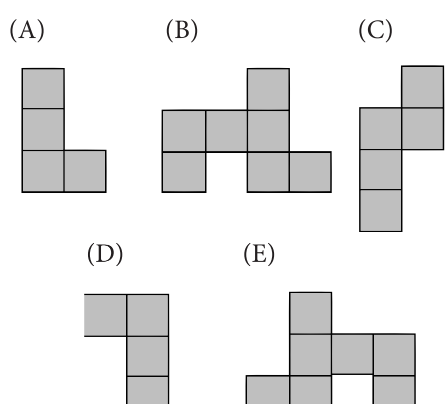
Problema 115. A un conejo le gustan mucho las zanahorias y el repollo. En un día se puede comer o 9 zanahorias, o 2 repollos, o 4 zanahorias y 1 repollo. Durante una semana ha comido 30 zanahorias. ¿Cuántos repollos ha comido durante esta semana?

Solución. Observemos que el canguro no puede haber comido 4 zanahorias y un repollo todos los días, pues en 7 días comería $4 \cdot 7 = 28$ zanahorias, además 30 no es múltiplo de 4, luego, el conejo comió 9 zanahorias por lo menos en uno de los 7 días. Si el conejo comió 9 zanahorias solo en uno de los 7 días, en los otros 6 días debería haber comido $30-9 = 21$ zanahorias, pero 21 no es múltiplo de 4. Si el conejo comió 9 zanahorias en 2 de los 7 días, en los otros 5 días debería haber comido $30 - 18 = 12$ zanahorias, es decir en 3 de los otros 5 días comió 4 zanahorias y 1 repollo, y en los 2 restantes comió 2 repollos. De este modo el conejo comió 7 repollos.

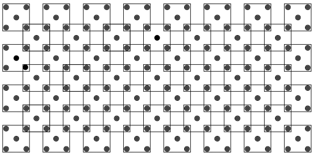
Problema 116. El sólido de la imagen fue hecho pegando ocho cubos iguales entre sí. ¿Cómo se ve desde arriba?



Solución. Desde arriba se ve la figura (C), que corresponde a las caras más iluminadas del sólido.



Problema 117. ¿Cuántos puntos hay en esta imagen?



Solución. En la figura se observan 4 filas con 8 cuadrados cada una, donde cada cuadrado tiene 5 puntos, supongamos que estas 4 filas se superponen sobre las tres filas con 7 cuadrados cada una, donde cada cuadrado tiene 1 punto. De este modo, las 4 filas de 8 cuadrados cada una tienen $4 \cdot 8 \cdot 5 = 160$ puntos, y las 3 filas de 7 cuadrados tienen $3 \cdot 7 \cdot 1 = 21$ puntos cada una. Finalmente la figura tiene $160 + 21 = 181$ puntos.

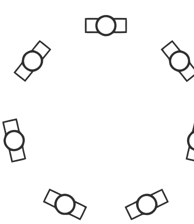
Problema 118. ¿En el planeta canguro cada canguro-año tiene 20 canguro-meses y cada canguro-mes tiene 6 canguro-semanas. ¿Cuántas canguro-semanas hay en un cuarto de canguro-años?

Solución. Un cuarto de canguro-años corresponden a $\frac{1}{4} \cdot 20 = 5$ canguro-meses, como cada canguro-mes tiene 6 canguro-semanas, 5 canguro-meses tienen $6 \cdot 5 = 30$ semanas.

Problema 119. Siete estudiantes (niños y niñas) están de pie en círculo. No hay dos niños de pie uno al lado del otro. No hay tres chicas de pie juntas una al lado de la otra. ¿Cuál de estas afirmaciones es cierta respecto al número de chicas que se ubicaron en el círculo?

a. Solo 3 es posible
b. 3 y 4 es posible
c. Solo 4 es posible
d. 4 y 5 es posible
e. Solo 5 es posible

Solución. No es posible que en el círculo haya 3 niñas, pues de los 4 niños quedarían 2 juntos. No es posible que en el círculo haya 5 niñas, pues quedarían 3 niñas juntas. Solo es posible que haya 4 niñas y 3 niños, de modo que en los 6 primeros lugares se intercalen niños y niñas, y en el séptimo lugar se agregue una niña (niño, niña, niño, niña, niño, niña, niña).



Problema 120. Evelyn ordenó cartas en línea como se muestra en la figura. En cada movimiento a Evelyn se le permite intercambiar cualquier par de cartas. ¿Cuál es el menor número de movimientos que Evelyn tiene que hacer para conseguir la palabra ALOCADOS?

O L D C S O A A

Solución. Como tenemos 8 letras, claramente con 8 movimientos logramos escribir la palabra ALOCADOS, pero como se trata de encontrar el menor número de movimientos, debemos buscar algún movimiento que deje inmediatamente 2 letras en su lugar. De este modo es conveniente intercambiar las letras en la quinta y octava posición:

O L D C A O A S

Luego, por la misma razón, nos conviene intercambiar las letras que están en la primera y séptima posición:

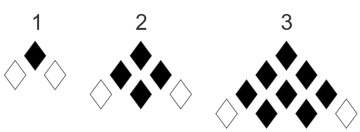
A L D C A O O S

Finalmente, intercambiamos las letras ubicadas en la tercera y sexta posición:

A	L	O	C	A	D	O	S

Por lo tanto, 3 es el menor número de movimientos.

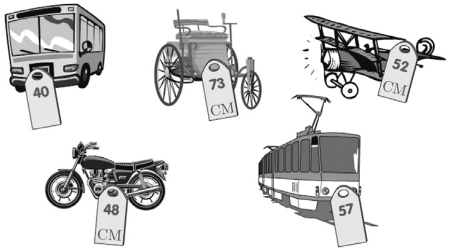
Problema 121. Se realiza una secuencia de triángulos de diamantes. En la figura se muestran las tres primeras etapas. En cada etapa se añade una línea de diamantes. En las líneas inferiores los diamantes exteriores son de color blanco. El resto de los diamantes en el triángulo son negros. ¿Cuántos diamantes negros tiene la figura en la etapa número 6?



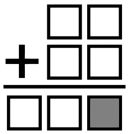
Solución. Notemos que en la primera figura se tienen 1 + 2 = 3 diamantes, en la segunda figura se tienen 1 + 2 + 3 = 6 diamantes y en la tercera figura se tienen 1 + 2 + 3 + 4 = 10 diamantes, de modo que en la etapa número 6 se tienen 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28 diamantes, como siempre se tienen dos diamantes blancos en las esquinas, en la etapa 6 hay 26 diamantes negros.

Problema 122. Un canguro compró juguetes y le entregó 150 canguro-monedas al asistente de la tienda. Recibió 20 canguro-monedas de vuelta. Luego cambió de opinión y cambió uno de los juguetes por otro. Le devolvieron 5 canguro-monedas. ¿Con qué juguetes salió el canguro de la tienda?

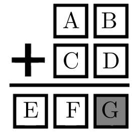
Solución. Inicialmente el canguro entregó 150 canguro-monedas al asistente de la tienda y recibió 20 canguro-monedas de vuelta, por lo que inicialmente gastó 130 canguro-monedas, como para comprar tres o más juguetes se necesitan más de 130 canguro-monedas, el canguro debe haber comprado dos juguetes, el carruaje y el tren, que son los únicos dos juguetes que suman 130 canguro-monedas. Como luego cambió uno de estos juguetes y le devolvieron 5 canguro-monedas, el canguro necesariamente cambio el tren por el avión.



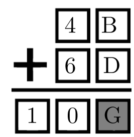
Problema 123. Escribe cada uno de los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 en los cuadrados para hacer la adición correcta. ¿Qué dígito estará en el cuadrado gris?



Solución. Denotemos cada una de las casillas con letras desde la A hasta la B.



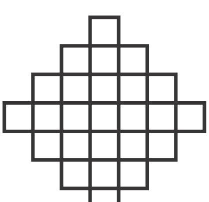
Notemos que la suma de 2 números de 2 dígitos es a lo más 99+99 = 198, dado que el resultado es un número de 3 dígitos entonces E = 1. Como E = 1, A + C debe ser 4 + 6 = 10 o 5 + 6 = 11, pero el 5 y el 6 se descartan pues F sería igual a 1, el cual ya ocupamos, luego ocupamos el 4 y el 6 en estas casillas, con lo que F = 0.



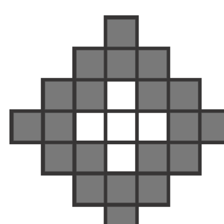
Finalmente nos queda por ubicar 2,3 y 5, y como 2 + 3 = 5, G = 5, con lo que tenemos:

$$\begin{array}{ccc} & 4 & 2 \\ + & 6 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 5 \end{array}$$

Problema 124. ¿Cuál es el mayor número de cuadrados pequeños que pueden ser sombreados para que ningún cuadrado de la forma:  echo de cuatro cuadrados sombreados pequeños aparezca en la figura?



Solución. Como se trata de pintar la mayor cantidad de cuadrados posibles, y no queremos cuadrados de 2 × 2, pintamos los bordes como se muestra en la figura, pues en los bordes nunca tendremos cuadrados de 2 × 2. Además si pintamos el cuadrado del centro aún se cumple la condición, por lo que podemos pintar 21 cuadrados pequeños.



Problema 125. Nicole ha escrito cada uno de los números del 1 al 9 en las celdas de la tabla 3 × 3. Solo cuatro de estos números se pueden ver en la figura. Nicole se ha dado cuenta de que para el número 5 la suma de los

Solución. Notemos que 5 no puede estar al centro, pues la suma de sus vecinos será 6 + 7 + 8 + 9 = 30, 6 tampoco puede ir al centro pues la suma de sus vecinos también será mayor que 13, de este modo el 5 y el 6 siempre tendrán 3 vecinos. 6 no puede estar entre 1 y 2, de ser así en la celda gris se debería escribir el 10, y 10 no se puede ocupar. 6 no puede estar entre 4 y 3, de ser así en la celda gris también se debería escribir el 6.

números en las celdas vecinas es igual a 13 (las celdas vecinas son aquellas celdas que comparten lados). Se dio cuenta que lo mismo se aplica para el número 6. ¿Qué número ha escrito Nicole en la celda sombreada?

1		2
4		3

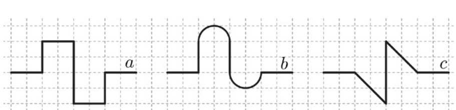
Luego el 6 debe estar entre 1 y 4, o bien, entre 2 y 3, de cualquier modo, la celda gris debe contener a 8.

Problema 126. El barco *MSC Fabiola* tiene el récord de ser el mayor buque contenedor en cruzar el canal de Panamá. Lleva 12500 contenedores que si se ubicaran de extremo a extremo alcanzarían una distancia de 75 km. ¿Cuál es la longitud de un contenedor?

Solución. 12500 contenedores en fila alcanzan una distancia de 75 km = 75000 mt. Como $\frac{75000}{12500} = 6$, se tiene que un contenedor mide 6 mt.

Problema 127. Si a, b y c denotan las longitudes de las líneas de la imagen, ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a. $a<b<c$
b. $a<c<b$
c. $b<a<c$
d. $b<c<a$
e. $c<b<a$



Solución. Notemos que:

- $a = 2 + 2 + 2 + 4 + 2 + 2 + 2 = 16$
- $b = 2 + 2 + \pi + 2 + \pi + 2 = 8 + 2\pi$
- $c = 2 + 2\sqrt{2} + 4 + 2\sqrt{2} + 2 = 8 + 4\sqrt{2}$

Luego $c < b < a$

Problema 128. ¿Qué número está en el medio de $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$?

Solución. El número que está en medio es:

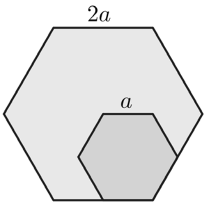
$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{4}{5}}{2} = \frac{\frac{10+12}{15}}{2} = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}$$

Problema 129. En el número 2014 el último dígito es más grande que la suma de los otros tres dígitos. ¿Cuántos años atrás fue la última vez que ocurrió esto?

Solución.
- Para 2013 no se cumple pues $3 = 2 + 0 + 1$.
- Para 2012 no se cumple pues $2 < 2 + 0 + 1$.
- Para 2011 no se cumple pues $1 < 2 + 0 + 1$.
- Para 2010 no se cumple pues $0 = 2 + 0 + 1$.
- Para 2009 si se cumple pues $9 > 2 + 0 + 0$.

Luego, esto ocurrió por última vez hace 5 años.

Problema 130. La longitud de los lados del hexágono regular grande es dos veces la longitud de los lados del hexágono regular pequeño. El hexágono pequeño tiene una superficie de 4 cm². ¿Cuál es el área del hexágono grande?



Solución. Dado que ambos hexágonos son semejantes, sabiendo que la razón entre las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza, se tiene que:

$$\frac{A_{\text{pequeño}}}{A_{\text{grande}}} = \left(\frac{1}{2}\right)$$

Como $A_{\text{pequeño}} = 4$, entonces:

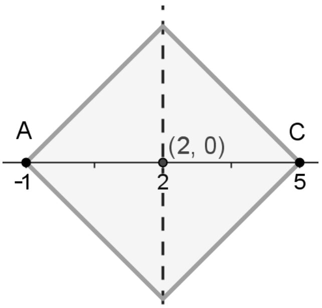
$$\frac{4}{A_{\text{grande}}} = \frac{1}{4} \Longrightarrow A_{\text{grande}} = 16 \text{ cm}^2$$

Problema 131. ¿Cuál es la negación de la siguiente declaración: "Todo el mundo resuelve más de 20 problemas"?

Solución. Alguien resuelve menos de 21 problemas.

Problema 132. En un sistema de coordenadas Tom dibujó un cuadrado. Una de sus diagonales se encuentra en el eje x. Las coordenadas de los dos vértices que están en el eje x son $(-1, 0)$ y $(5, 0)$. ¿Cuál de las siguientes son las coordenadas de otro vértice del cuadrado?

Solución. Si $\overline{AC}$ es una diagonal, entonces la otra diagonal es perpendicular a $\overline{AC}$ y pasa por el punto $(2, 0)$, con medida 6 unidades. Luego los otros vértices son $(2,-3)$ y $(2, 3)$.



Problema 133. En un pueblo, la razón entre hombres adultos y mujeres adultas es de 2 : 3 y la razón entre las mujeres y los niños es de 8 : 1. ¿Cuál es la razón entre los adultos (hombres y mujeres) y los niños?

Solución. Como la razón entre hombres adultos y mujeres adultas es de 2 : 3, entonces hay $2k$ hombres y $3k$ mujeres. Como la razón entre las mujeres y los niños es de 8 : 1, entonces hay $8j$ mujeres y j niños. Luego:

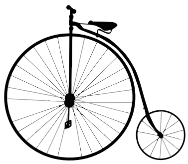
$$8j = 3k \Longrightarrow j = \frac{3}{8}k$$

Por lo tanto la razón entre los adultos (hombres y mujeres) y los niños es de:

$$\frac{2k + 3k}{\frac{3}{8}k} = \frac{40}{3}$$

Problema 134. La rueda grande de esta bicicleta tiene 4,2 metros de perímetro. La rueda pequeña tiene 0,9 metros de perímetro. En un determinado momento, las válvulas de las dos ruedas están en su punto más bajo. La bicicleta rueda hacia la izquierda. ¿Después de cuántos metros estarán nuevamente las dos válvulas en su punto más bajo?

Solución. Debemos encontrar el mínimo común múltiplo entre 4, 2 y 0, 9. Notemos que $42 = 7 \cdot 3 \cdot 2$ y $9 = 3 \cdot 3$, luego el mínimo común múltiplo entre 42 y 9 es $7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 126$, por lo tanto después de 12, 6 metros estarán nuevamente las dos válvulas en su punto más bajo.

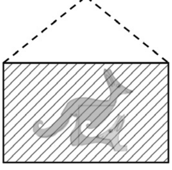


Problema 135. Una abuela, su hija y su nieta pueden decir este año (2014) que la suma de sus edades es 100. ¿En qué año nació la nieta si cada una de las edades es una potencia de 2?

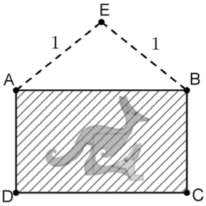
Solución. Notemos que $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$, $32 = 2^5$, $64 = 2^6$ son las potencias de 2 menores a 100, de las cuales tres deben sumar 100, lo que solamente se logra con $2^2, 2^5, 2^6$. De este modo se tiene que las edades de la nieta, la hija y la abuela son 4, 32, 64 respectivamente, por lo que la nieta nació el año 2010.

Problema 136. Pablo puso algunos cuadros rectangulares en la pared. Por cada foto puso un clavo en la pared 2,5 m por encima del suelo y adjuntó una larga cadena de 2 m en las dos esquinas superiores. ¿Cuál de las siguientes fotos es la más cercana al suelo (formato: ancho en cm × altura en cm)?

a. 60 × 40
b. 120 × 50
c. 120 × 90
d. 160 × 60
e. 160 × 100



Solución. Debemos calcular la altura del triángulo ABE para $\overline{AB} = 0,6$, $\overline{AB} = 1,2$ y para $\overline{AB} = 1,6$...



- Altura del $\triangle ABE$ para $\overline{AB} = 0,6$:

$$0,3^2 + h_1^2 = 1^2$$

$$h_1^2 = 1 - 0,09$$

$$h_1 = \sqrt{0,91}$$

- Altura del $\triangle$ABE para $\overline{AB} = 1, 2$:

$$0,6^2 + h_1^2 = 1^2$$

$$h_1^2 = 1 - 0,36$$

$$h_1 = 0,8$$

- Altura del $\triangle$ABE para $\overline{AB} = 1, 6$:

$$0,8^2 + h_1^2 = 1^2$$

$$h_1^2 = 1 - 0,64$$

$$h_1 = 0,6$$

Determinemos cuál es el cuadro que está más cerca del suelo sumando la altura del rectángulo a estos valores según corresponda.

- Rectángulo $60 \times 40 \Longrightarrow 0,95 + 0,4 = 1,35$ metro.
- Rectángulo $120 \times 50 \Longrightarrow 0,8 + 0,5 = 1,3$ metros.
- Rectángulo $120 \times 90 \Longrightarrow 0,8 + 0,9 = 1,7$ metros.
- Rectángulo $160 \times 60 \Longrightarrow 0,6 + 0,6 = 1,2$ metros.
- Rectángulo $160 \times 100 \Longrightarrow 0,6 + 1 = 1,6$ metros.

Finalmente la foto más cercana al suelo es la de 120×90.

Problema 137. Seis niñas comparten un departamento con dos baños que utilizan todas las mañanas a partir de las 7:00 en punto. Ellas usan el baño una a la vez, y se sientan a desayunar juntas tan pronto como la última chica ha terminado. Pasan 9, 11, 13, 18, 22 y 23 minutos en el baño respectivamente. Estando bien organizadas, ¿Qué es lo más temprano que pueden desayunar juntas?

Solución. Se trata de distribuir las 6 niñas en los dos baños, tal que ocupen el baño en el menor tiempo posible, por lo que debemos lograr que la suma de los tiempos en cada baño sean lo más cercanas posibles.

Observemos que si todas entraran a un solo baño se demorarían $9+11+13+18+22+23 = 96$ minutos, es decir, ocupando dos baños deberían demorarse 48 minutos en cada uno. Comencemos ubicando las que más se demoran, una en cada baño:

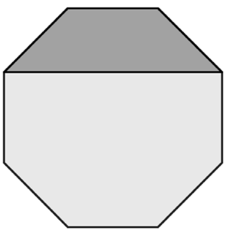
$$B1 : 23 + a + b, \quad B2 : 22 + c + d$$

De este modo debemos escoger entre los restantes (9, 11, 13, 18) una pareja que sume 26 y otra que sume 25, lo cual es imposible, por lo que intentaremos que un grupo se demore 47 minutos y el otro 49 minutos. De este modo se tiene:

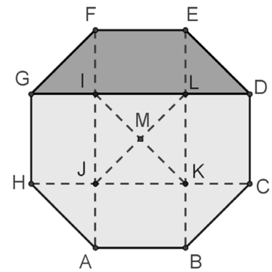
$$B1 : 23 + 13 + 11, \quad B2 : 22 + 18 + 9$$

Por lo que a las 07 : 49, será lo más temprano que pueden desayunar juntas.

Problema 138. En la siguiente figura hay un octágono regular. El área sombreada mide 3 cm^2. Encontrar el área del octágono.



Solución.



Sea T el área de cada uno de los triángulos que componen el cuadrado central:

$$A\triangle JKM = A\triangle KLM = A\triangle LIM + A\triangle IJM = T$$

Dichos triángulos son congruentes con cada uno de los cuatro triángulos de las esquinas:

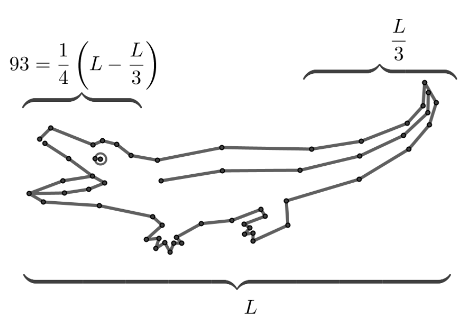
$$A\triangle BCK = A\triangle DEL = A\triangle FGI = A\triangle HAJ = T$$

Luego si sumamos las a´reas de los cuatro cuadriláteros *AHABC+ABCDE+ ADEFG +AFGHA*, estamos sumando 4 veces de más cada triángulo de área T, pero aún nos falta sumar los 4 triángulos centrales. Luego el área del hexágono es:

$$3+3+3+3-4t+4t=12$$

Problema 139. Una nueva especie de cocodrilo ha sido descubierta en África. La longitud de la cola es de un tercio de toda su longitud. Su cabeza es de 93 cm de largo y esta corresponde a la cuarta parte de la longitud del cocodrilo sin su cola. ¿Cuánto mide este cocodrilo en cm?

Solución. Sea L la longitud del cocodrilo, entonces la longitud de la cola es $\frac{L}{3}$ y la de su cabeza es de $\frac{1}{4}\left(L-\frac{L}{3}\right)$.



Por lo tanto debemos resolver la siguiente ecuación :

$$93 = \frac{1}{4}\left(L - \frac{L}{3}\right)$$

$$93 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} L$$

$$93 = \frac{L}{6}$$

$$558 = L$$

Finalmente la longitud del cocodrilo es de 558 cm.

Problema 140. En la imagen hay un dado especial. Los números en las caras opuestas siempre suman lo mismo. Los números que no podemos ver en la imagen son todos números primos. ¿Qué número es opuesto al 14?

Solución. Sean p_1, p_2, p_3 los primos ubicados en las caras que no se ven, entonces:

$$18 + p_1 = 35 + p_2 = 14 + p_3$$

- Como $14 + p_3 = 18 + p_1 \Longrightarrow p_3 = 4 + p_1$.
- Como $14 + p_3 = 35 + p_2 \Longrightarrow p_3 = 21 + p_2$.

Notemos que el primo que sigue 21 es 23, por lo tanto si $p_2 = 2$, $p_3 = 23$, y para $p_3 = 23$, $p_1 = 19$ que también es primo. Luego una solución es $p_3 = 23$.

Problema 141. Ana ha caminado 8 kilómetros con una velocidad de 4 km/h. Ahora ella correrá algún tiempo con una velocidad de 8km/h. ¿Cuánto tiempo le queda por correr para que su velocidad promedio global sea de 5km/h?

Solución. Si Ana ha caminado 8 kilómetros a 4 km/h, entonces ha caminado durante 2 horas, y aún le queda por recorrer t horas a una velocidad de 8 km/h, es decir le queda por recorrer $8t$ km luego se cumple que:

$$\frac{8 + 8t}{2 + t} = 5$$

Por lo que $t = \frac{2}{3}$ h = 40 min.

Problema 142. Un jugador de ajedrez jugó 40 partidos y acumuló 25 puntos (una victoria cuenta como un punto, un empate cuenta como medio punto, y una derrota cuenta como cero puntos). ¿Cuál es la diferencia entre los partidos ganados y los partidos perdidos?

Solución. Sea G el número de partidos ganados, E el número de partidos empatados, y P el número de partidos perdidos, entonces:

$$G + E + P = 40 \qquad (2.1)$$

$$G + \frac{E}{2} = 25 \qquad (2.2)$$

Restando ambas ecuaciones obtenemos que:

$$P + E - \frac{E}{2} = 40 - 25 \Longrightarrow P + \frac{E}{2} = 15 \qquad (3)$$

Finalmente, restando (2) − (3), obtenemos que $G - P = 10$.

Problema 143. Las trillizas Javiera, Daniela y Luisa querían comprar sombreros idénticos. Sin embargo, a Javiera le faltaba un tercio del precio, a Daniela un cuarto y a Luisa un quinto. Cuando los sombreros estuvieron \$940 más baratos, las hermanas juntaron sus ahorros y cada una de ellas compró un sombrero. No les sobró ni un peso. ¿Cuál era el precio de un sombrero antes de que su precio disminuyera?

Solución. Sea P el precio del sombrero antes de bajar, entonces:

- Si a Javiera le faltaba $\frac{1}{3}$ de P, entonces tenía $\frac{2}{3}P$.
- Si a Daniela le faltaba $\frac{1}{4}$ de P, entonces tenía $\frac{3}{4}P$.
- Si a Luisa le faltaba $\frac{1}{5}$ de P, entonces tenía $\frac{4}{5}P$.

Cuando los sombreros estuvieron \$940 más baratos, es decir cuando costaban $\$p - 940$, cada una de ellas compró un sombrero, luego, cuando juntaron sus ahorros obtuvieron $\$3(P - 940)$. Esta situación puede ser representada por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}P + \frac{3}{4}P + \frac{4}{5}P &= 3(P - 940)\\ \frac{133}{60}P &= 3P - 2820\\ P &= 3600\end{aligned}$$

Luego, el precio del sombrero antes de que este disminuyera era de \$3600.

Problema 144. Sean p, q, r números enteros positivos y

$$p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r}} = \frac{25}{19}$$

¿Cuál es el valor del producto pqr?

Solución.

$$\begin{aligned}p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r}} &= \frac{25}{19}\\ p + \cfrac{1}{\cfrac{qr+1}{r}} &= \frac{25}{19}\\ p + \frac{r}{qr+1} &= \frac{25}{19}\\ \frac{p(qr+1)+r}{qr+1} &= \frac{25}{19}\end{aligned}$$

De este modo $qr + 1 = 19 \Longrightarrow qr = 18$ y $p(qr + 1) + r = 19p + r = 25$, por lo tanto, $p = 1$. Finalmente, el valor de $pqr = 18$

Problema 145. En la ecuación $N \cdot U \cdot (M + E + R + O) = 33$, cada letra representa un dígito diferente $(0, 1, 2, \ldots, 9)$. ¿Cuántas maneras diferentes hay para elegir los valores de las letras?

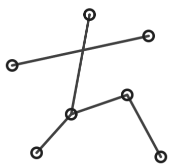
Solución. Notemos que $33 = 3 \cdot 11$, por lo que $N \cdot U = 3$ y $M + E + R + O = 11$.

- Para $N \cdot U = 3$, tenemos 2 posibilidades, $3 \cdot 1 = 3$ y $1 \cdot 3 = 3$. De este modo para M,E,R,O solo podemos elegir entre los valores $\{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

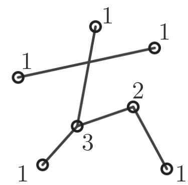
- Para $M+E+R+O = 11$, tenemos que solo la suma $0 + 2 + 4 + 5 = 11$ cumple. Por lo tanto podemos combinar estos cuatro sumandos de $4! = 24$ maneras.

Finalmente, existen $2 \cdot 24 = 48$ maneras diferentes para elegir los valores de las letras.

Problema 146. En la imagen que se muestra, Karina quiere añadir algunos segmentos de línea de tal manera que cada uno de los siete puntos tenga el mismo número de conexiones a los otros puntos. ¿Cuál es el menor número de segmentos de línea que Karina debe dibujar?

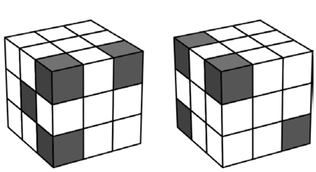


Solución. Comencemos asignando a cada vértice el número correspondiente al número de conexiones que tiene, si sumamos estos números obtenemos 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 3 = 10. Nuestro objetivo es que los siete puntos tengan el mismo número de conexiones a los otros puntos, es decir que la suma de los números asignados a los vértices sea un múltiplo de 7 mayor o igual que 7 · 3 (pues en la figura hay un vértice con 3 conexiones), luego la suma puede ser 21 = 10 + 11, 28 = 10 + 18, 35 = 10 + 25, 42 = 10 + 32, …

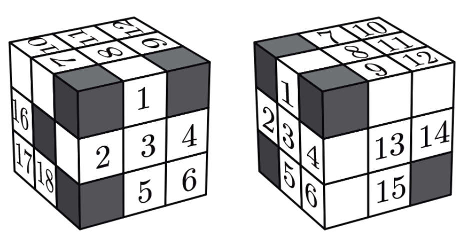


Además, notemos que cada vez que unimos un vértice con otro, sumaremos 1 a cada uno de estos vértices, por lo tanto, por cada segmento que tracemos uniendo dos vértices agregaremos 2 unidades al total, es decir que a 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 3 siempre sumaremos un número par, luego como mínimo obtendremos 10 + 18 = 28 como suma, por lo que el menor número de segmentos que se trazarán es 9.

Problema 147. La imagen muestra el mismo cubo desde dos puntos de vista diferentes. Está construido a partir de 27 cubos pequeños, algunos de ellos son de color negro y algunos son blancos. ¿Cuál es el mayor número de cubos negros que podría haber?



Solución. Enumerando cada uno de los cubos pequeños de color blanco que podemos ver en el gran cubo, podemos contar 18 de estos, con lo cual, concluimos que a lo más puede haber 9 cubos pequeños de color negro.



Problema 148. En una isla, las ranas son siempre verdes o azules, cuando el número de ranas verdes se redujo el 60%, el número de ranas azules aumentó el 60%. Resultó que la nueva relación de las ranas

Solución. Sea a el número de ranas azules y v el número de ranas verdes, entonces el número de ranas azules aumentó el 60%, ahora hay a + 0, 6a = 1, 6a. Como las ranas verdes disminuyeron el 60%, ahora hay v – 0, 6v = 0, 4v. Como la nueva relación de las ranas azules a las ranas verdes es igual a la relación anterior pero en el orden opuesto, se tiene que:

$$=$$

azules a las ranas verdes es igual a la relación anterior, pero en el orden opuesto (ranas verdes a las ranas azules). ¿En qué porcentaje se modificó el número total de las ranas?

$$\frac{v}{a} = \frac{1{,}6a}{0{,}4v}$$

$$\frac{v}{a} = 4\,\frac{a}{v}$$

$$\frac{v^2}{a^2} = 4$$

$$\frac{v}{a} = 2$$

$$v = 2a$$

Como inicialmente había a ranas azules al aumentar el 60% ahora hay $1,6a$. Por otra parte inicialmente había $2a$ ranas verdes al disminuir el 60% ahora hay $0,8a$. Finalmente pasamos de tener $3a$ ranas, a tener $2,4a$ ranas, por lo que las ranas disminuyeron el 20%.

Problema 149. Tomás escribió varios números enteros positivos distintos, sin exceder de 100. Si el producto de estos números no es divisible por 18. A lo más, ¿cuántos números podría haber escrito?

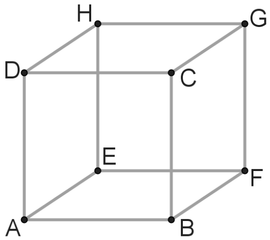
Solución. Se trata de eliminar del producto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100$ la menor cantidad de factores, tal que 18 no divida el número resultante.

Notemos que $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ por lo que en el producto de todos los números que escribamos puede tener el 3 como factor solo una vez a lo más, ya que con un segundo múltiplo de tres y un número par, el número sería divisible por 18, y como de 1 a 100 hay 33 múltipos de 3, eliminamos 32 de ellos, dejando solo 1, por ejemplo el 3. De esta forma nos aseguramos de que nunca $3 \cdot 3$ sea un factor, y así podemos dejar en el producto todos los número pares que no son múltiplos de 3. Como de 1 a 100 hay 100 números, y ya quitamos 32, quedan 68 números enteros.

Finalmente el máximo número de enteros que logra escribir es 68.

Problema 150. Con cualquier trío de vértices de un cubo que no están sobre una misma cara formamos un triángulo. ¿Cuántos triángulos se pueden formar con esta condición?

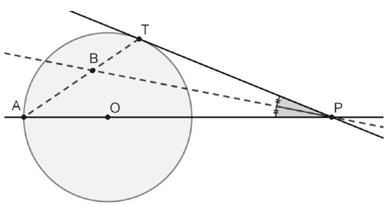
Solución. Analicemos los triángulos que podemos construir utilizando una arista de la cara frontal. Observando la imagen y comenzando con la arista AB, tenemos los triángulos ABH y ABG, del mismo modo, por cada una de las otras 3 aristas de la cara frontal, podemos formar 2 triángulos. Luego desde la cara frontal, usando las aristas, podemos trazar $2 \cdot 4 = 8$ triángulos.



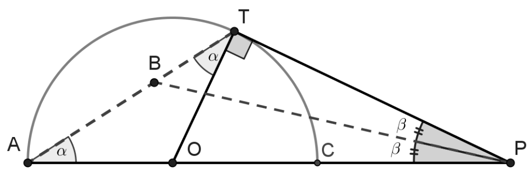
Por otra parte, contemos los triángulos que podemos formar comenzando con la diagonal AC de la cara frontal, tenemos los triángulos ACE, ACF, ACG y ACH, con la diagonal DB, también construimos 4 triángulos. Luego desde la cara frontal, usando las diagonales, podemos trazar $4 \cdot 2 = 8$ triángulos. Por lo tanto desde la cara frontal podemos construir 16 triángulos, y desde la cara frontal 16 triángulos más, en total 32 triángulos.

Notemos que si intentamos construir un triángulo partiendo de una arista o diagonal de una cara lateral, este coincide con alguno de los ya construidos.

Problema 151. En la imagen, PT es tangente a una circunferencia C con centro O y PB bisectriz del ángulo TPA. Calcula el ángulo TBP.



Solución. Como PT es tangente a la circunferencia, $\angle OTP = 90^o$. Como OA y OT son radios, $\angle TAO = \angle OTA = \alpha$. Como PB es bisectriz, $\angle APB = \angle BPT = \beta$.



Luego en el $\triangle BPT$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \angle TBP + \alpha + 90 + \beta &= 180 \\ \angle TBP &= 90 - (\alpha + \beta) \qquad (2.3) \end{aligned}$$

Además como $\angle TBP$ es un ángulo exterior del triángulo ABP, entonces el ángulo TBP es la suma de los ángulos interiores no adyacentes, es decir:

$$\angle TBP \ = \alpha + \beta \ (2.4)$$

Sumando estas dos ecuaciones (3) + (4) se tiene que

$$2\angle TBP = 90^o \Longrightarrow \angle TBP = 45^o$$

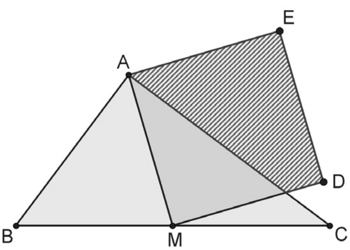
Problema 152. Considere el conjunto de todos los números de 7 dígitos que se pueden obtener utilizando, para cada número, todos los dígitos 1, 2, 3, ..., 7. Enumere los números de la serie en orden creciente y divida la lista exactamente en la mitad en dos partes de igual tamaño. ¿Cuál es el último número de la primera mitad?

Solución. Notemos que podemos enumerar en orden creciente todos los números de la serie y dividir esta en 7 partes iguales (7 conjuntos con el mismo número de elementos). De este modo tendremos el conjuntos de los que comienzan con 1, de los que comienzan con 2, ..., de los que comienzan con 7. Luego la mitad de la serie estará en el conjunto de los que comienzan con 4.

Análogamente el grupo de los que comienzan con 4 lo podemos dividir en 6 subgrupos, los que comienzan con 41, los que comienzan con 42, ..., los que comienzan con 47, descartando en esta lista los que comienzan con 44. De este modo se tiene que la mitad de la serie estará entre los números 4376521 (el mayor de la lista que comienza con 43) y 451236 7 (el menor de la lista que comienza con 45).

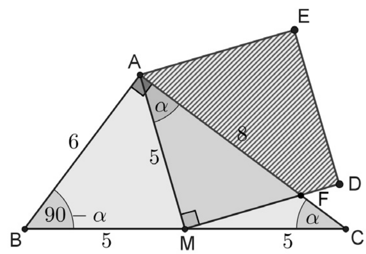
Finalmente, el último número de la primera mitad es 4376521.

Problema 153. Sea ABC un triángulo tal que $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm y $BC = 10$ cm y sea M el punto medio de BC. $AMDE$ es un cuadrado, y MD intersecta AC en el punto F. Encontrar el área del cuadrilátero $AFDE$ en cm^2.



Solución. Observemos que el triángulo ABC es rectángulo en A pues:

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= BC^2 \\ 36 + 64 &= 100 \end{aligned}$$



Como M es el punto medio del lado BC se tiene que $BM = CM = AM = 5$, $\angle BAC = 90^o$, luego, M es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, por lo tanto, $BM = BA = MC$ (radios de la circunferencia inscrita) por lo que el cuadrado tiene lado 5.

Notemos que como $AM = CM$ el triángulo ACM es isósceles, entonces:

$$\angle MCA = \angle MAC = \alpha$$

Entonces se tiene que el triángulo ABC y el triánguloMFA tienen todos sus ángulos congruentes, por lo que son semejantes $\triangle ABC \sim \triangle MFA$. Luego se cumple que:

$$\frac{MF}{AB} = \frac{MA}{AC}$$

$$\frac{MF}{6} = \frac{5}{8}$$

$$MF = \frac{30}{8}$$

De este modo el área del triángulo AMF es:

$$A_{\triangle AMF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{30}{8} \cdot 5 = \frac{75}{8}$$

Finalmente el área del cuadrilátero AFDE está dada por:

$$A_{AFDE} = A_{\square AMDE} - A_{\triangle AMF} = 25 - \frac{75}{8} = \frac{125}{8}$$

Problema 154. Hay 2014 personas en una fila. Cada uno de ellos es un mentiroso (que siempre miente) o un caballero (que siempre dice la verdad). Cada persona dice "Hay más mentirosos a mi izquierda que caballeros a mi derecha". ¿Cuántos mentirosos hay en la fila?

Solución. Sean las personas

$$P_1, P_2, P_3, ..., P_{2013}, P_{2014}$$

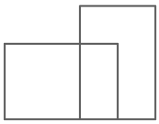
Claramente P_1 miente pues no hay nadie a la izquierda de él. P_2 no puede ser caballero, si fuera así a su derecha serían todos mentirosos pero P_3 diría la verdad, luego P_2 miente. Del mismo modo podemos razonar con P_3, P_4, …, P_{1007} concluyendo que todos son mentirosos y que P_{1008}, P_{1009}, ..., P_{2014} son caballeros, pues siempre habrá más mentirosos a su izquierda que caballeros a su derecha, por lo tanto hay 1007 mentirosos.

Problema 155. Cada año, el tercer jueves del mes de marzo aparece el Trauco en Chiloé. ¿Cuál es la fecha más tardía en que puede aparecer el Trauco algún año?

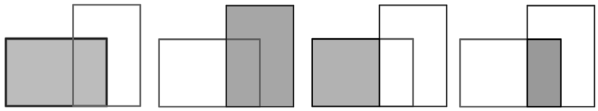
a. 14 de marzo
b. 15 de marzo
c. 20 de marzo
d. 21 de marzo
e. 22 de marzo

Solución. Basta con encontrar el primer Jueves más lejano, lo cual ocurre cuando Marzo comienza en Viernes, es decir Viernes 1 de Marzo, lo que implica que el primer Jueves es el día 7 de Marzo, por lo tanto el Trauco aparecerá a más tardar el día Jueves 21 de Marzo.

Problema 156. ¿Cuántos cuadriláteros de cualquier tamaño se muestran en la figura?



Solución. Cuatro cuadriláteros, los cuales se muestran a continuación.



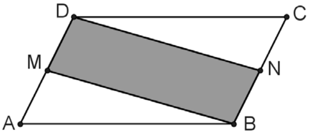
Problema 157. ¿Cuál es el resultado de:

$$2014 \cdot 2014 \div 2014 - 2014?$$

Solución. $[(2014 \cdot 2014) \div 2014] - 2014 = 0$
Pues de acuerdo a la prioridad de las operaciones primero multiplicamos y/o dividimos de izquierda a derecha y finalmente sumamos y/o restamos de izquierda a derecha (en ausencia de paréntesis).

Problema 158. El área del paralelogramo *ABCD* es 10. Los puntos *M* y *N* son puntos medios de los lados *AD* y *BC*. ¿Cuál es el área del cuadrilátero *MBND*?

Solución. Al unir los puntos *M* y *N* se forman cuatro triángulos equivalentes (de igual área), por lo tanto el área de cada triángulo es 2.5, finalmente el área del cuadrilátero sombreado *MBND* es 5.

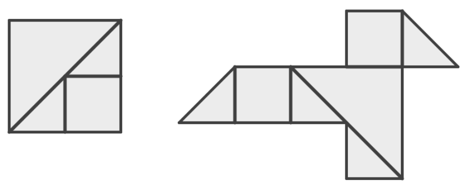


Problema 159. El producto de dos números es 36 y la suma es 37. ¿Cuál es la diferencia positiva entre ellos?

Solución. Sean x y $37 - x$ los números buscados, por lo tanto $x \cdot (37 - x) = 36$, al resolver esta ecuación cuadrática se obtienen como soluciones 1 y 36. Al considerar $x = 1 \Longrightarrow 37 - x = 36$, al considerar $x = 36 \Longrightarrow 37 - x = 1$ y en ambos casos la diferencia positiva es 35.

Problema 160. Amanda tiene varios cuadrados de papel de área 4. Ella los corta en cuadrados y en triángulos rectángulos de la forma en que se muestra en el primer diagrama. Luego toma algunas de las piezas y hace un pájaro como se muestra en el segundo diagrama. ¿Cuál es el área de este pájaro?

Solución. Como el área del cuadrado original es 4 y la diagonal lo divide en dos partes iguales, el triángulo grande tiene área 2, el área del cuadrado pequeño es 1 y el área de cada uno de los triángulos pequeños tiene área ½ . Identificando cada una de estas partes en la nueva figura notamos que su área es 6.



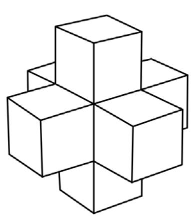
Problema 161. Un estanque estaba lleno hasta su mitad, el abuelo Anacleto añadió 2 litros al estanque. Ahora el estanque Está lleno a tres cuartos de su capacidad. ¿Cuál es la capacidad del estanque?

Solución. Si el estanque estaba hasta la mitad y con 2 litros adicionales quedó a tres cuartos de su capacidad, significa que los dos 2 litros que añadió el abuelo corresponden a ¼ de la capacidad.

Luego, $2 = \dfrac{capacidad}{4} \Rightarrow capacidad = 2 \cdot 4 = 8$ litros

Problema 162. Jorge construyó el cuerpo que se muestra a continuación usando siete unidades cúbicas. ¿Cuántos cubos tiene que agregar para hacer un cubo con aristas de longitud 3?

Solución. Como el cubo que se debe formar es de arista 3, este contendrá 27 cubos pequeños de arista 1, y como ya tenemos 7, faltan 20 cubos.



Problema 163. ¿Cuál de los siguientes cálculos entrega el resultado más grande?

a. 44×777
b. 55×666
c. 77×444
d. 88×333
e. 99×222

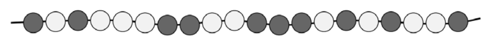
Solución. Notemos que:

- $44 \times 777 = 11 \times 4 \times 111 \times 7 = 11 \times 111 \times 4 \times 7$
- $55 \times 666 = 11 \times 5 \times 111 \times 6 = 11 \times 111 \times 5 \times 6$
- $77 \times 444 = 11 \times 7 \times 111 \times 4 = 11 \times 111 \times 7 \times 4$
- $88 \times 333 = 11 \times 8 \times 111 \times 3 = 11 \times 111 \times 8 \times 3$
- $99 \times 222 = 11 \times 9 \times 111 \times 2 = 11 \times 111 \times 9 \times 2$

Observemos que todos los números tienen los factores 11×111, por lo que analizamos los otros dos factores, donde 5×6 es el mayor, por lo tanto, el resultado más grande es 55×666.

Problema 164. El collar de la imagen contiene perlas grises y perlas blancas. Marcos saca una perla tras otra del collar. Siempre saca una perla de uno de los extremos. Se detiene cuando ha quitado la quinta perla gris. ¿Cuál es el mayor número de perlas blancas que Marcos puede haber sacado?

Solución. El mayor número de perlas blancas que Marcos puede sacar es 7, lo cual se deduce de la siguiente manera, Marcos quita una perla gris de cada lado sacando luego 3 blancas, Marcos quita nuevamente una perla gris de cada lado y puede sacar 4 blancas más, finalmente Marcos quita la quinta perla gris de cualquiera de los lados del collar, se detiene y no puede quitar más perlas. Finalmente el mayor número de perlas blancas que Marcos puede sacar es de 7 perlas.



Problema 165. Juan tiene una lección de piano dos veces en la semana y Alejandra tiene una lección de piano cada dos semanas. En un momento determinado, Juan tiene 15 lecciones más que Alejandra. ¿Cuántas semanas de lecciones lleva?

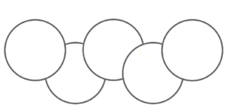
Solución. Observemos que por cada lección de Alejandra Juan toma 4 lecciones, por lo que la cantidad de lecciones que toma Alejandra y la cantidad de lecciones que toma Juan están en la razón ¼.

Sea x la cantidad de lecciones que ha tomado Alejandra queremos que Juan haya tomado $x + 15$ lecciones, por lo que debe ocurrir que:

$$\frac{1}{4} = \frac{x}{x+15}$$

Resolviendo la ecuación se tiene $x = 5$, o sea Alejandra ha tomado 5 lecciones, es decir han transcurrido 10 semanas, por lo tanto Juan ha tomado 20 lecciones.

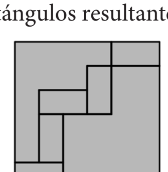
Problema 166. En el diagrama, el área de cada círculo es 1cm^2. El área común a dos círculos superpuestos es 18cm^2. ¿Cuál es el área de la región cubierta por los cinco círculos?



Solución. El área de cada círculo es 1 cm^2, entonces, el área de 5 de ellos es 5cm^2, pero como dos de estos tienen un sector común de ⅛ cm^2, y dichos sectores son 4 se tiene que el área de la figura es:

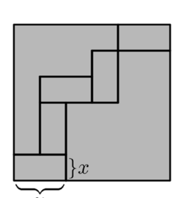
$$5 - 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{9}{2}\,\text{cm}^2$$

Problema 167. Cinco rectángulos iguales se colocan dentro de un cuadrado de 24cm de lado, como se muestra en el diagrama. ¿Cuál es el área de uno de los rectángulos resultantes?



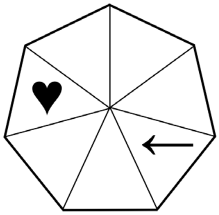
Solución. Sean x e y los lados del rectángulo, como muestra la figura, de este modo se tiene que $2x + 2y = 24$ y que $3y + x - x = 24$.

Obteniendo de la segunda ecuación que $y = 8$, y reemplazando en la primera se tiene que $x = 4$, por lo que el área del rectángulo es $8 \cdot 4 = 32\text{cm}^2$



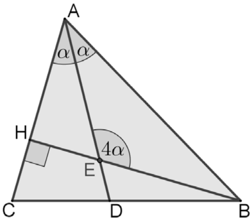
Problema 168. El corazón y la flecha están en las posiciones mostradas en la figura. Al mismo tiempo, el corazón y la flecha empiezan a moverse. La flecha se mueve tres lugares hacia la derecha y el corazón se mueve cuatro lugares hacia la izquierda y luego se detiene. Siguen la misma rutina una y otra vez. ¿Después de cuántas veces repetida la rutina se encontrará el corazón y la flecha en el mismo triángulo por primera vez?

Solución. Nunca se encontrará el corazón y la flecha en el mismo triángulo pues rotar una figura tres posiciones a la derecha es equivalente que rotarla 4 lugares a la izquierda, esto es equivalente a mover ambas figuras 3 lugares a la derecha, o bien, mover 4 lugares a la izquierda, por lo que nunca se juntarán.



Problema 169. La figura muestra el triángulo *ABC* en donde *BH* es una altura y *AD* es bisectriz del ángulo en *A*. El ángulo obtuso entre *BH* y *AD* es cuatro veces el ángulo *DAB*. ¿Cuánto mide el ángulo *CAB*?

Solución. Notemos que $\angle AEH = 90^{o} - \alpha$, además, $\angle AEH + \angle AEB = 180^{o}$, es decir, $90^{o} - \alpha + 4\alpha = 180^{o}$ por lo tanto $\alpha = 30^{o}$.

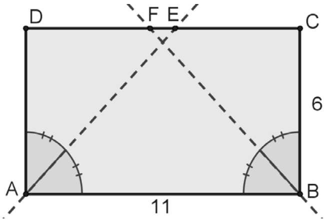


Problema 170. Un rectángulo tiene lados de longitudes 6cm y 11cm. Se selecciona uno de los lados largos y se dibujan las bisectrices de los ángulos en cada extremo de ese lado. Estas bisectrices dividen el otro lado largo en tres partes. ¿Cuáles son las longitudes de estas secciones?

Solución. Al trazar las bisectrices como se muestra en la figura se generan dos triángulos rectángulos isósceles cuya medida de los catetos es 6. De la figura también se deduce que:

$$\overline{DF} + \overline{FE} + \overline{EC} = 11$$

Como $\overline{DE} = 6$, $\overline{EC} = 5$, por lo tanto $\overline{FE} = 1$ y $\overline{DF} = \overline{EC} = 5$.



Problema 171. El Capitán Sparrow y su tripulación pirata desenterraron varias monedas de oro. Ellos dividen las monedas entre sí de manera que cada persona recibe el mismo número de monedas. Si

Solución. Sea x el número de monedas por tripulantes, y el número de tripulantes. Entonces $x \cdot y$ será el número total de monedas. Con los datos se puede plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

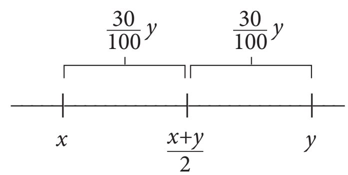
$$(y - 4) \cdot (x + 10) = x \cdot y$$
$$y \cdot (x - 5) = x \cdot y - 50$$

hubiera cuatro piratas menos en la tripulación, entonces cada persona recibiría 10 monedas más. Sin embargo, si hubiera 50 monedas menos, cada persona recibiría 5 monedas menos. ¿Cuántas monedas desenterraron?

Dicho sistema tiene como solución $x = 15$ e $y = 10$. Finalmente se desenterraron $x \cdot y = 150$ monedas.

Problema 172. El promedio de dos números positivos es 30% menos que uno de ellos. ¿En qué porcentaje es mayor este promedio que el otro número?

Solución. Sean x e y números positivos tal que $x < y$. El promedio de los dos números es entonces $\frac{x+y}{2}$.



Como dicho promedio es 30% menos que uno de ellos se tiene que y es $\frac{3}{10}y$ mayor que el promedio, del mismo modo, x es $\frac{3}{10}y$ menor que el promedio, tal como muestra la figura.

Por otra parte, tenemos que:

$$\frac{x+y}{2} = y - \frac{3}{10}y$$

$$\frac{y}{2} - y + \frac{3}{10}y = -\frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{5}y = \frac{x}{2}$$

$$\mathrm{y} = \frac{5}{2}x$$

Entonces el promedio es:

$$\frac{x+y}{2} = \frac{x+\frac{5}{2}x}{2} = \frac{x}{2} + \frac{5}{4}x$$

Como queremos saber la diferencia entre el promedio y x sumamos y restamos x a esta expresión obteniendo:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{5}{4}x - \frac{x}{2} = x + \frac{3}{4}x$$

Finalmente el promedio es 75% mayor que x.

Problema 173. Una pesa no está funcionando correctamente. Si algo es más ligero que 1000 g, la pesa muestra el peso correcto. Sin embargo, si algo es más pesado o igual que 1000 g, la pesa puede mostrar cualquier número por encima de 1000 g. Tenemos 5 pesos A, B, C, D, E cada uno bajo los 1000 g. Cuando se pesan de dos en dos la pesa muestra lo siguiente:

$B + D = 1200$, $C + E = 2100$, $B + E = 800$, $B + C = 900$, $A + E = 700$.

¿Cuál de estos es el que más pesa?

Solución. Enumeremos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} B + E &= 800 && (1)\\ B + C &= 900 && (2)\\ A + E &= 700 && (3)\\ B + D &> 1000 && (4)\\ C + E &> 1000 && (5) \end{aligned}$$

Restamos (2)−(1) y obtenemos que $C - E = 100$. Por lo tanto, $C > E$.

Restamos (1)−(3) y obtenemos que $B - A = 100$. Por lo tanto, $B > A$.

Sumamos (4) + (5) y obtenemos que $B + C + D + E > 2000$. Como $B + C = 900$, entonces $D + E > 1100$. Por (5) $C + E > 1000$, restando estas dos desigualdades se tiene que $D - C > 100$. Por lo tanto $D > C$.

Sumamos (4) + (5) y obtenemos que $B + C + D + E > 2000$. Como $B + E = 800$, entonces $D + C > 1200$. Por (4) $B + D > 1000$, restando estas dos desigualdades se tiene que $C - B > 200$. Por lo tanto $C > B$.

Finalmente D es el que más pesa.

Problema 174. Andrés escribe todos los dígitos del 1 al 9 en las celdas de una tabla de 3 × 3, de manera que cada celda contiene un dígito. Él ya ha escrito el 1, 2, 3 y 4, como se muestra en la figura. Dos números son considerados como vecinos si sus celdas comparten un borde. Una vez introducidos todos los números se da cuenta de que la suma de los vecinos de 9 es 15. ¿Cuál es la suma de los vecinos de 8?

1		3
2		4

Solución. Observemos que la suma de los primeros 9 dígitos es 45.

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 8 + 9 = 45$$

Los dígitos que debemos ubicar en los cuadrados libres a parte de 9 son 5, 6, 7, 8, por lo tanto 9 no puede ubicarse al centro pues sus vecinos serían 5, 6, 7, 8, que suman 26. El 9 no puede estar entre 1 y 2 pues al centro se debería ubicar el 12, del mismo modo, no puede estar entre 1 y 3, ni entre 2 y 4, como se muestra en la figura.

1		3
9	12	
2		4

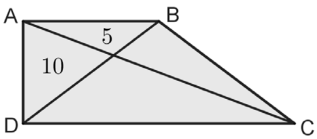
1	9	3
	11	
2		4

1		3
	9	
2	9	4

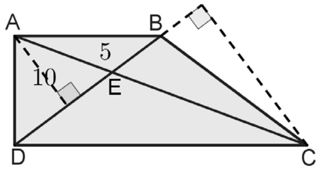
Concluimos que 9 debe estar entre 3 y 4, lo que obliga que 8 esté en el centro, siendo 15 la suma de los vecinos de este.

1		3
	8	9
2		4

Problema 175. El cuadrilátero $ABCD$ tiene ángulos rectos en los vértices A y D. Los números muestran las áreas de dos de los triángulos. ¿Cuál es el área de $ABCD$?



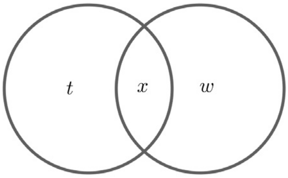
Solución. Sea E la intersección de las diagonales. Notemos que los triángulos ABD y ABC tienen igual área, pues tienen la misma base AB y la misma altura AD. De este modo el triángulo BEC tiene área 10.



Proyectemos la altura desde A hasta BD. Como los triángulos ADE y AEB tienen la misma altura y sus áreas están en razón $1 : 2$, entonces $BE : ED = 1 : 2$. Por otra parte los triángulos BEC y DEC comparten la misma altura, proyectada desde C a la prolongación del segmento DB, como sus bases BE y ED están en la razón $1 : 2$, y comparten la altura, la razón entre las áreas también es $1 : 2$. Dado que el área del triángulo BEC es 10, el área del triángulo EDC es 20. Finalmente, el área del cuadrilátero es 45 u^2.

Problema 176. Liz y María compiten en la resolución de problemas. A cada una de ellas se les da la misma lista de 100 problemas. La primera en resolver cualquiera de estos problemas obtiene 4 puntos, mientras que la segunda en resolverlo obtiene 1 punto. Liz resolvió 60 problemas, y María también resolvió 60 problemas. Juntas, consiguieron 312 puntos. ¿Cuántos problemas fueron resueltos por ambas?

Solución.



Sea t la cantidad de problemas que resuelve solamente Liz, w la cantidad de problemas que resuelve solamente María y x la cantidad de problemas que resuelve tanto Liz como María.

De este modo Liz ha resuelto $t + x = 60$ problemas y María ha resuelto $w + x = 60$ problemas. Por los $t + w$ problemas resueltos por solo una de ellas han acumulado $4t + 4w$ puntos, por lo problemas resueltos por ambas han acumulado $5x$ puntos (la primera en resolver cualquiera de estos problemas obtiene 4 puntos, mientras que la segunda en resolverlo obtiene 1 punto).

Como juntas consiguieron 312 puntos, se tiene que:

$$4t + 4w + 5x = 312$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} t + x &= 60 \implies t = 60 - x \\ w + x &= 60 \implies w = 60 - x \end{aligned}$$

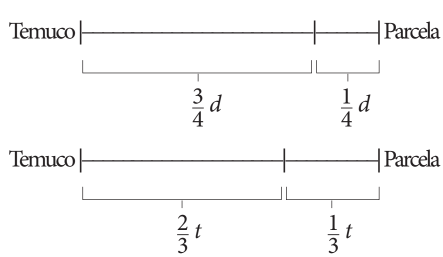
Luego:

$$\begin{aligned} 4t + 4w + 5x &= 312 \\ 240 - 4x + 240 - 4x + 5x &= 312 \\ -3x &= -168 \\ x &= 56 \end{aligned}$$

Finalmente, 56 problemas fueron resueltos por Liz y María a la vez.

Problema 177. David viaja en su bicicleta desde Temuco a su parcela. Él debía llegar a las 15:00, pero gastó 2/3 del tiempo planeado cubriendo 3/4 de la distancia. Después de eso, pedaleó más lentamente y llegó justo a tiempo. ¿Cuál es la razón entre la velocidad de la primera parte del viaje y la velocidad de la segunda parte del viaje?

Solución. Sea d la distancia desde Temuco a la parcela, y t el tiempo que demora David en cubrir dicha distancia en bicicleta. Notemos que en el primer trayecto David recorre $\frac{3}{4}d$ en $\frac{2}{3}t$.



Como la velocidad $v = \frac{d}{t}$, la velocidad de David en el primer trayecto es:

$$v_1 = \frac{\frac{3}{4}d}{\frac{2}{3}t} = \frac{9d}{8t}$$

Y la velocidad de David en el segundo trayecto es:

$$v_2 = \frac{\frac{1}{4}d}{\frac{1}{3}t} = \frac{3d}{4t}$$

Luego:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{9d}{8t}}{\frac{3d}{4t}} = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$$

Finalmente, la razón entre las velocidades de la primera y segunda parte del viaje es 3 : 2.

Problema 178. En grupo de 25 personas formado por caballeros, niños y damas, los caballeros siempre dicen la verdad, los niños siempre mienten, y de las damas algunas mienten y otras dicen la verdad. Cuando

Solución. Sea c el número de caballeros, n el número de niños, d el número de damas (d_m las que mienten y d_v las que dicen la verdad). de modo que:

$$c + n + d = 25$$

Cuando se les preguntó: "¿Es usted una dama?", 12 de ellos dise les preguntó: "¿Es usted una dama?", 12 de ellos dijeron: "Sí". Cuando se les preguntó: "¿Es usted un niño?", 8 de ellos dijeron: "Sí". ¿Cuántos caballeros hay en el grupo?

jeron "Sí",entre ellos las damas que dicen la verdad, y los niños, pues mienten, por lo tanto, $n + d_v = 12$.

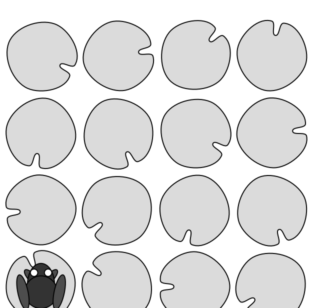
Cuando se les preguntó: "Es usted un niño", 8 de ellos dijeron: "Sí", solamente respondieron que sí las damas mentirosas, por lo tanto $d_m = 8$.

Sabiendo que $d_m = 8$ y que $n + d_v = 12$, se tiene que hay 20 personas contando los niños y todas las damas, por lo que los caballeros resultan ser 5.

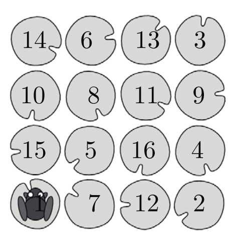
Problema 179. Diferentes números enteros positivos se escriben en el pizarrón. Exactamente dos son divisibles por 2 y exactamente 13 de ellos son divisibles por 13. Sea M el más grande de estos números. ¿Cuál es el menor valor posible de M?

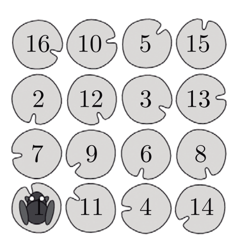
Solución. Como en la pizarra tiene que haber al menos 13 números divisibles por 13, y exactamente 2 números pares, estos también deben ser múltiplos de 13, para que así el más grande de estos números sea el menor valor posible. De este modo elegimos los primeros 11 múltiplos de 13 impares y 2 múltiplos de 13 pares menores a $13 \cdot 21$. Finalmente, el menor valor posible de M es $13 \cdot 21 = 273$.

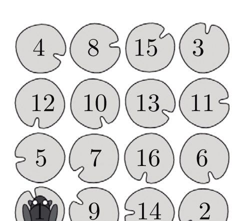
Problema 180. En un estanque hay 16 hojas de lirio de agua formando un patrón de 4 por 4 como se muestra en la imagen. Una rana se sienta en una hoja en una de las esquinas. A continuación, salta de una hoja a otra, ya sea horizontal o verticalmente. La rana siempre salta por encima de al menos una hoja y nunca cae en la misma hoja dos veces. ¿Cuál es el mayor número de hojas (incluyendo la hoja en la que se encuentra) que la rana puede alcanzar?



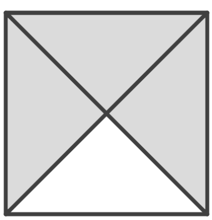
Solución. La rana saltando según las condiciones del problema puede alcanzar las 16 hojas que hay en el agua (incluyendo la hoja en la que se encuentra), a continuación se muestran tres de las posibles combinaciones que cubren las 16 hojas.



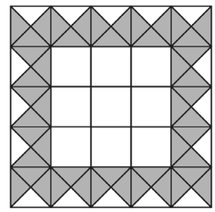


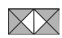


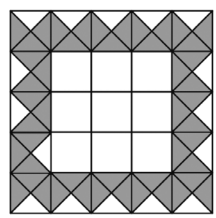
Problema 181. Una plaza de 5 × 5 Está hecha de 25 azulejos de 1 × 1, todos los azulejos con el mismo patrón, tal como el azulejo que se muestra en la figura. Se sabe que en la plaza siempre dos baldosas adyacentes tienen el mismo color a lo largo del borde compartido. El perímetro de la plaza se compone de segmentos blancos (lados de triángulos blancos) y grises (lados de triángulos grises) de longitud 1. ¿Cuál es el menor número posible de tales segmentos grises de longitud 1?

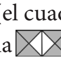


Solución. Nos interesa rodear la plaza con segmentos blancos, un arreglo óptimo es el mostrado en la imagen, lo que nos obliga a tener 4 segmentos grises alrededor de la plaza, pues es imposible tener dos segmentos blancos formando una esquina.



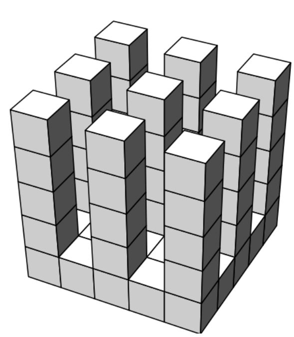
Pero de este modo debemos rellenar el resto de la plaza (el cuadrado de 3×3) con baldosas que necesariamente sean de la forma  (por la condición de que en la plaza siempre dos baldosas adyacentes tienen el mismo color a lo largo del borde compartido), pero esto es imposible, pues nos queda por cubrir una cantidad impar de baldosas.



Luego debemos modificar el arreglo inicial e intentar cubrir la plaza dejando 5 segmentos grises alrededor de la plaza, de modo que el interior de la plaza (el cuadrado de 3 × 3), se pueda cubrir con 4 piezas de la forma , y con una pieza de la forma .

Problema 182. De un cubo de 5 × 5 ×5 formado por cubos pequeños de 1 × 1 × 1 se han sacado algunos cubos pequeños, quedando el cuerpo que se muestra en la figura. ¿Cuántos cubos pequeños 1×1×1 se han sacado?

Solución. Notemos que el cubo grande de 5×5×5 está formado 125 cubos pequeños de 1×1×1, en el sólido que muestra la figura hay una base de 5×5×1 = 25 cubos y 9 columnas de 1 × 1 × 4 = 36 cubos, en total hay 61 cubos, luego faltan 64 cubos pequeños para completar el cubo grande.



Problema 183. Hoy es el cumpleaños de Carla, Emilia y Liliana. La suma de sus edades es 44. ¿Cuál será la suma de sus edades, la próxima vez que esta vuelva a ser un número de dos dígitos iguales?

Solución. Observemos que en un año más, sumaremos 3 años a la suma de sus edades, en dos años más sumaremos $3 \cdot 2 = 6$ años a la suma de sus edades, en n años más sumaremos $3 \cdot n$ años a la suma de sus edades, por lo que año a año la suma de sus edades se incrementa en un múltiplo de 3, de modo que el incremento de la suma de sus edades debe ser divisible por 3. Teniendo en cuenta que los números con 2 dígitos iguales, mayores que 44, son 55, 66, 77, 88 y 99, el único número que cumple la condición es 77, pues $77 - 44 = 33 = 3 \cdot 11$.

Problema 184. Si $a^b = \frac{1}{2}$ ¿Cuál es el valor de a^{-3b}?

Solución. Usando las propiedades de las potencias, se tiene que:

$$a^{-3b} = (a^b)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$$

Problema 185. Hay 48 pelotas colocadas en tres canastas de diferentes tamaños. La canasta más pequeña junto con la más grande, contienen dos veces el número de pelotas que contiene la canasta mediana. La canasta más pequeña contiene la mitad de número de pelotas que tiene la canasta del centro. ¿Cuántas pelotas hay en la canasta grande?

Solución. Sea a el número de pelotas en la canasta pequeña, b el número de pelotas en la canasta mediana y c el número de pelotas en la canasta grande, entonces:

$$\begin{aligned} a + c &= 2b \\ a &= \frac{b}{2} \\ a + b + c &= 48 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene que $a = 8$, $b = 16$ y $c = 24$.

Problema 186. Calcule el valor de:

$$\frac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}}$$

Solución.

$$\begin{aligned} \frac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}} &= \frac{2^{2013} \cdot (2-1)}{2^{2012} \cdot (2-1)} \\ &= \frac{2^{2013}}{2^{2012}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Problema 187. ¿Cuál de estas expresiones no contiene $b + 1$ como un factor?

a. $2b + 2$ **d.** $-1 - b$
b. $b^2 - 1$ **e.** $b^2 + 1$
c. $b^2 + b$

Solución.

- $2b + 2 = 2(b + 1)$
- $b2 - 1 = (b + 1)(b - 1)$
- $b2 + b = b = b + 1$
- $-1 - b = -(1 + b) = -(b + 1)$
- $b2 + 1$ no se puede factorizar en $\mathbb{R}$.

Luego, las cuatro primeras expresiones son factorizadas por $(b + 1)$, la quinta no tiene como factor $(b + 1)$.

Problema 188. ¿Cuántas cifras tendrá el resultado de la multiplicación: $(2^{22})^5 \cdot (5^{55})^2$?

Solución.

$$(2^{22})^5 \cdot (5^{55})^2 = 2^{110} \cdot 5^{110} = 10^{110}$$

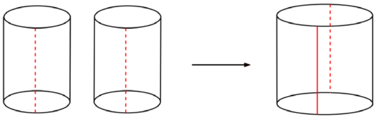
Notemos que 10^0 tiene 1 cifra, 10^1 tiene 2 cifras, 10^2 tiene 3 cifras, 10^n tiene $n + 1$ cifras. Por lo tanto 10^{110} tiene 111 cifras.

Problema 189. Héctor tiene una cuenta de correo electrónico secreto que solo cuatro de sus amigos conocen. Hoy recibió 8 emails a esa cuenta. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a. Héctor recibió dos correos electrónicos de cada amigo.
b. Héctor no pudo haber recibido ocho correos electrónicos de un solo amigo.
c. Héctor recibió al menos un correo electrónico de cada amigo.
d. Héctor recibió por lo menos dos correos electrónicos de uno de sus amigos.
e. Héctor recibió al menos dos correos electrónicos de 2 amigos diferentes.

Solución. Analicemos cada alternativa. Se descarta que Hector recibió dos correos electrónicos de cada amigo, porque Hector puede haber recibido incluso los 8 correos de solo un amigo. Se descarta que Hector no pudo haber recibido ocho correos electrónicos de un solo amigo, pues el enunciado dice que Hector recibió 8 correos, no necesariamente de un solo amigo. Se descarta que Hector recibió al menos un correo electrónico de cada amigo, pues es posible que alguno de sus amigos no le haya enviado ningún correo. Es correcto que Hector recibió por lo menos dos correos electrónicos de uno de sus amigos, pues como son 4 amigos y ha recibido 8 correos, al menos un amigo le envió al menos dos correos a Hector.

Problema 190. Dos cilindros idénticos se cortan a lo largo de las líneas punteadas y se pegan entre sí formando un cilindro más grande (ver figura). ¿Qué se puede decir sobre el volumen del cilindro grande en comparación con el volumen de un cilindro pequeño?



Solución. Sea r el radio de los cilindros pequeños y h su altura, al cortar los dos cilindros y unirlo, el perímetro de la circunferencia basal del cilindro grande será $2\pi r + 2\pi r = 4\pi r$. Sea R el radio del cilindro mayor, por lo tanto, $4\pi r = 2\pi R \Longrightarrow R = 2r$.

Calculando los volúmenes de los cilindros, se obtiene que el volumen del cilindro pequeño es $\pi \cdot r^2 \cdot h$ y el volumen del cilindro mayor es:

$$\pi \cdot R^2 \cdot h = \pi \cdot (2r)^2 \cdot h = 4\pi r^2 h$$

Luego el volumen del cilindro grande es cuatro veces el volumen del cilindro pequeño.

Problema 191. En el número 2014 los dígitos son diferentes y el último dígito es mayor que la suma de los otros tres dígitos ¿Cuántos años antes de 2014 ocurrió esto por última vez?

Solución. Notemos que no puede ser entre el año 2010 y 2013, pues el último dígito no es mayor que la suma de los primeros 3 $(2 + 0 + 1 = 3)$. Se descartan los años entre 2000 y el 2009, ya que contienen entre sus cifras 2 ceros y los dígitos deben ser distintos. También se descartan los años entre 1900 y 1999, pues la suma de los tres primeros dígitos es mayor o igual que 10, de igual manera se descartan los años entre 1800 y 1899, pues la suma de los tres primeros dígitos es mayor o igual que 9. Entre los años 1700 y 1799 la suma de los dos primeros dígitos es 8, por lo tanto el tercer dígito debe ser cero, y el cuarto dígito debe ser 9, es decir, el año 1709. Como $2014 - 1709 = 305$, entonces hace 305 años atrás ocurrió esto por última vez.

Problema 192. El tamaño de una caja rectangular es $a \times b \times c$, con $a < b < c$. Si aumenta a o b o c en un número positivo dado, el volumen de la caja también aumenta. ¿En cuál de los siguientes casos el volumen de la caja es mayor?

a. Si aumenta solo a.
b. Si aumenta solo b.
c. Si aumenta solo c.
d. El aumento de volumen es la misma en a), b), c).
e. Depende de los valores de a, b, c.

Solución. Sea x la constante positiva en que aumentan los lados, analicemos los siguientes 3 casos:

- $(a + x) \cdot b \cdot c = abc + bcx$
- $a \cdot (b + x) \cdot c = abc + acx$
- $a \cdot b \cdot (c + x) = abc + abx$

Debemos comparar ahora los tres productos $bcx, acx, abx,$ donde claramente bcx es mayor, pues b y c son los lados más grandes. Luego el mayor aumento se produce cuando aumenta a.

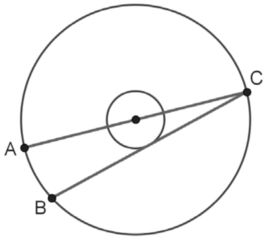
Problema 193. En un partido de fútbol, el ganador recibe 3 puntos, el perdedor recibe 0 puntos, mientras que en el caso de un empate, cada equipo obtiene 1 punto. Cuatro equipos, A, B, C, D, participan en un torneo de fútbol. Cada equipo juega tres partidos. Al final del torneo el equipo A obtiene 7 puntos y los equipos B y C, 4 puntos cada uno. ¿Cuántos puntos obtuvo el equipo D?

Solución. Observemos que:

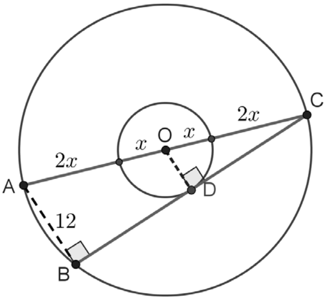
- Como A tiene 7 puntos, necesariamente ganó 2 y empató 1.
- Como B tiene 4 puntos, necesariamente ganó 1, empató 1 y perdió 1.
- Como C tiene 4 puntos, , necesariamente ganó 1, empató 1 y perdió 1.

Tenemos que en total $A + B + C$ ganaron 4 partidos, por lo que deben haber 4 derrotas, como B y C perdieron cada uno 1 partido, entonces, D perdió los otros 2 partidos. Además A, B, C juntos acumulan 3 empates, así que D debe haber empatado con alguno de ellos. De este modo D, de los 3 partidos que jugó, perdió 2 y empató 1, obteniendo 1 punto.

Problema 194. Los radios de dos círculos concéntricos están en la razón 1 : 3. AC es el diámetro del círculo grande; BC es una cuerda del círculo grande que es tangente al círculo más pequeño; y la longitud de la cuerda AB es 12. Calcule el radio del círculo grande.



Solución. Sea D el punto de tangencia de la cuerda BC con la circunferencia pequeña, por lo que el segmento OD es perpendicular al segmento BC. Además, el triángulo ABC es rectángulo en B pues está inscrito en la semicircunferencia mayor, con lo cual $ODC \sim ABC$ en razón 1 : 2, luego el radio de la circunferencia menor es 6, por lo que el radio la circunferencia mayor es 18.



Problema 195. ¿Cuántas tripletas (a, b, c) de enteros con $a > b > c > 1$ satisface que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} > 1$?

Solución. Como queremos que los sumandos sean lo más grande posible, los denominadores de cada fracción deben ser lo menor posible. Para $a = 2$ y $b = 3$, se tiene que:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

Por lo que $\frac{1}{c}$ debe ser mayor que $\frac{1}{6}$, de este modo $\frac{1}{c}$ debe ser $\frac{1}{5}$ o $\frac{1}{4}$. Finalmente las tripletas que cumplen la condición son (2, 3, 4) y (2, 3, 5).

Problema 196. a, b, c son números no nulos, n es un número entero positivo. Se sabe que los números $(-2)^{2n+3} \cdot a^{2n+2} \cdot b^{2n-1} \cdot c^{3n+2}$ y $(-3)^{2n+2} \cdot a^{4n+1} \cdot b^{2n+5} \cdot c^{3n-4}$ tienen el mismo signo. ¿Cuál de las siguientes alternativas es siempre verdadera?

a. $a > 0$ **d.** $a < 0$
b. $b > 0$ **e.** $b < 0$
c. $c > 0$

Solución. Observemos que $2n + 3$ es impar, entonces $(-2)^{2n+3}$ es negativo, como $2n + 2$ es par, entonces $(-3)^{2n+2}$ es positivo, luego $a^{2n+2} \cdot b^{2n-1} \cdot c^{3n+2}$ y $a^{4n+1} \cdot b^{2n+5} \cdot c^{3n-4}$ tienen signos distintos.

Del mismo modo $2n - 1$ y $2n + 5$ son impares, entonces b^{2n-1} y b^{2n+5} tienen el mismo signo, luego $a^{2n+2} \cdot c^{3n+2}$ y $a^{4n+1} \cdot c^{3n-4}$ deben tener signos distintos.

Además, $3n+2$ y $3n-4$ son pares cuando n es par y son impares cuando n es impar, entonces c^{3n+2} y c^{3n-4} tienen el mismo signo para cualquier valor de n, por lo que a^{2n+2} y a^{4n+1} deben tener signos distintos, así es que $a < 0$.

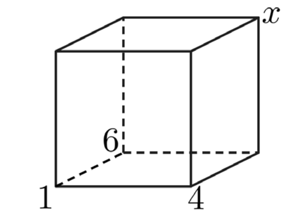
Problema 197. Seis semanas son $n!$ segundos. Calcule el valor de n.

Solución. La cantidad de segundos que hay en 6 semanas es:

$$\begin{aligned} 6 \cdot 7 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 &= 6 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 60 \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 30 \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 90 \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \\ &= 10! \end{aligned}$$

Luego $n = 10$.

Problema 198. Los vértices de un cubo se enumeran de 1 a 8 de manera que el resultado de la suma de los cuatro vértices de una cara es la misma para todas las caras. Los números 1, 4 y 6 ya se encuentran establecidos en algunos vértices como se muestra en la figura. ¿Cuál es el valor de x?

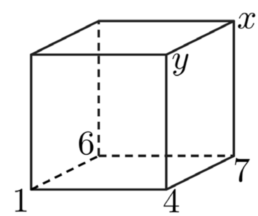


Solución. Como en un cubo un vértice es la intersección de tres caras, cada número ubicado en los vértices, participa en la suma de 3 caras distintas, es decir, en la suma total de las seis caras cada numero aparecerá 3 veces, por lo que la suma será:

$$1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + \ldots + 8 + 8 + 8 = 3 \cdot (1 + 2 + \ldots + 8) = 108$$

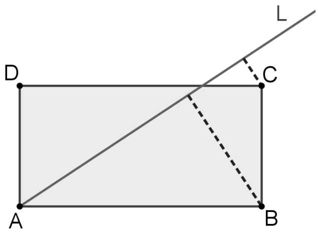
Como se tienen 6 caras, cada cara suma = 18.

De este modo, en la base del cubo el cuarto vértice necesariamente es 7, además $4 + 7 + x + y = 18$ pues son los vértices de una cara, es decir $x + y = 7$, 1 y 6 no pueden ser, pues ya están en la base, 4 y 3 no pueden ser pues 4 ya está en la base, de modo que solo es posible 2 y 5.



Además x no puede ser 5, de ser así, en la cara trasera los 3 vértices ya sumarían 18, de modo que $x = 2$.

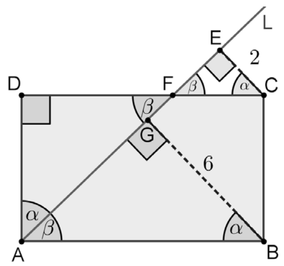
Problema 199. La línea L pasa por el vértice A de un rectángulo $ABCD$. La distancia del punto C a L es 2, y la distancia del punto B a L es 6. Si AB es el doble de BC, encontrar AB.



Solución. Claramente:

$$\triangle AFD \sim \triangle BAG \sim \triangle CFE$$

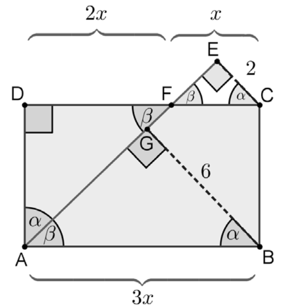
Entonces la razón de semejanza entre $\triangle CFE$ $\triangle BAG$ es $1 : 3$. Llamemos x a la medida del segmento FC, entonces $AB = 3x$ y $DF = 2x$.



Además, $AD = \frac{3}{2}x$, aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo AFD se determina que $AF = \frac{5}{2}x$. Como $\triangle AFD \sim \triangle CFE$, se tiene que:

$$\frac{2}{\frac{3x}{2}} = \frac{x}{\frac{5x}{2}}$$

Resolviendo la ecuación se tiene que $x = \frac{10}{3}$, por lo tanto $AB = 10$.



Problema 200. La función $f(x) = ax + b$ satisface las igualdades $f(f(f(1))) = 29$ y $f(f(f(0))) = 2$. ¿Cuál es el valor de a?

Solución. Notemos que:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b \\ f(1) &= a + b \\ f(f(1)) &= a(a + b) + b = a^2 + ab + b \\ f(f(f(1))) &= a(a^2 + ab + b) + b = a^3 + a^2b + ab + b = 29 \end{aligned}$$

Además

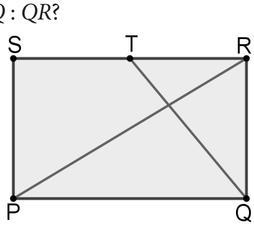
$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b \\ f(0) &= b \\ f(f(0)) &= ab + b \\ f(f(f(0))) &= a(ab + b) + b = a^2b + ab + b = 2 \end{aligned}$$

Como $a^2b + ab + b = 2 \Longrightarrow a^3 + a^2b + ab + b = a^3 + 2 = 29$. Finalmente $a^3 = 27 \Rightarrow a = 3$.

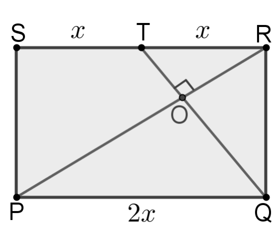
Problema 201. Hay 10 diferentes enteros positivos, exactamente 5 de ellos son divisibles por 5 y exactamente 7 de ellos son divisibles por 7. Sea M el más grande de estos 10 números. ¿Cuál es valor mínimo posible de M?

Solución. Los primeros 7 múltiplos de 7 son 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, notemos que el 35 es también un múltiplo de 5, por lo tanto solo debemos agregar a la lista 4 múltiplos de 5 menores que 49, por ejemplo pueden ser 5, 10, 15, 20, así que 49 es el valor mínimo de M.

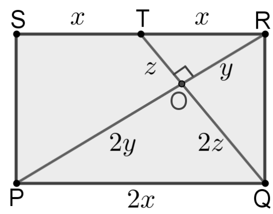
Problema 202. $PQRS$ es un rectángulo. T es el punto medio RS. QT es perpendicular a la diagonal PR. ¿Cuál es la razón $PQ : QR$?



Solución. Se observa claramente que $\triangle TOR \sim \triangle QOP$ en razón 1 : 2.



Al aplicar el teorema de Pitágoras en los triángulos OQR y OQP, obtenemos que:



$$\overline{PQ} = \sqrt{(2y)^2 + (2z)^2}$$

$$\overline{QR} = \sqrt{y^2 + (2z)^2}$$

Luego,

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{\sqrt{(2y)^2 + (2z)^2}}{\sqrt{y^2 + (2z)^2}} = \frac{\sqrt{4y^2 + 4z^2}}{\sqrt{y^2 + 4z^2}}$$

Además $\triangle TQR$ es rectángulo en R e y es la altura, aplicando el teorema de Euclides, se tiene que $y^2 = 2z^2$. De este modo:

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{\sqrt{4 \cdot 2z^2 + 4z^2}}{\sqrt{2y^2 + 4z^2}} = \frac{\sqrt{12z^2}}{\sqrt{6z^2}} = \sqrt{2}$$

Finalmente $PQ : QR = \sqrt{2} : 1$

Problema 203. Hay 9 canguros, ellos son de color plata o de color oro. Cuando 3 canguros se encuentran por casualidad, la probabilidad de que ninguno de ellos sea color plata es $\frac{2}{3}$. ¿Cuántos canguros son de color oro?

Solución. Sean $C_1, C_2, C_3, \dots, C_9$ los nueve canguros, entonces la cantidad total de grupos de tres canguros será

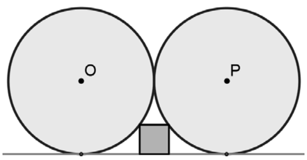
$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!(9-3)} = 84$$

Donde $\frac{2}{3}$ de estos grupos no tiene canguros color plata, es decir, $\frac{2}{3}$ de 84, 56 grupos. Por lo tanto debemos encontrar el número n de canguros color oro, de manera tal, que al agruparlos de tres en tres formemos 56 grupos, esto queda expresado como:

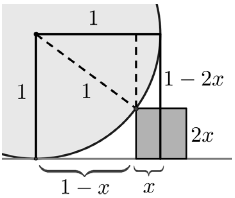
$$\begin{aligned}
\binom{n}{3} &= 56\\
\frac{n!}{3! \cdot (n-3)} &= 56\\
\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot \ldots \cdot 1}{6 \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot \ldots \cdot 1} &= 56\\
\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} &= 56\\
n \cdot (n-1) \cdot (n-2) &= 8 \cdot 7 \cdot 6\\
n &= 8
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la cantidad de canguros color oro es 8.

Problema 204. Un cuadrado se ajusta perfectamente entre la línea horizontal y dos círculos tangentes de radio 1. ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado?



Solución. Sea $2x$ la medida del lado del cuadrado, como el radio de los círculos es 1 podemos establecer las siguientes medidas:



Utilizando el teorema de Pitágoras, se tiene que:

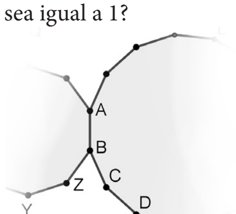
$$\begin{aligned} (1-x)^2 + (1-2x)^2 &= 1 \\ 1 - 2x + x^2 + 1 - 4x + 4x^2 - 1 &= 0 \\ 5x^2 - 6x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación cuadrática obtenemos las soluciones $x_1 = \frac{1}{5}$ y $x_2 = 1$, pero x no puede ser 1, de ser así, no existirían los círculos, luego $x = \frac{1}{5}$. Finalmente el lado del cuadrado mide $\frac{2}{5}$.

Problema 205. Tomás quiere escribir varios números enteros positivos distintos, ninguno de ellos mayor a 100. Por otra parte, el producto de todos estos números no debe ser divisible por 54. ¿Cuál es el máximo número de enteros que logra escribir?

Solución. Se trata de eliminar del producto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100$ la menor cantidad de factores, tal que 54 no sea divisor del número resultante. Notemos que $54 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2$ por lo que en el producto de todos los números que escribamos puede tener el 3 como factor dos veces a lo más, ya que con un tercer múltiplo de tres y un número par, el número sería divisible por 54, y como de 1 a 100 hay 33 múltipos de 3, eliminamos 31 de ellos, dejando solo 2, los cuales no pueden ser múltiplos de 9 ni de 27, por ejemplo dejamos 3 y 15. De esta forma nos aseguramos de que nunca $3 \cdot 3 \cdot 3$ sea un factor, y así podemos dejar en el producto todos los número pares que no son múltiplos de 3. Como de 1 a 100 hay 100 números, y ya quitamos 31, quedan 69 números enteros. Finalmente el máximo número de enteros que logra escribir es 69.

Problema 206. Dos polígonos regulares de lado 1 tienen en común el lado AB. Uno de ellos $ABCD\ldots$ tiene 15 lados y el otro $ABZY\ldots$ tiene n lados. ¿Qué valor de n hace que la distancia CZ sea igual a 1?



Solución. Claramente el triángulo BCZ debe ser equilátero de lado 1. Por otra parte la medida de cada uno de los ángulos interiores de un póligono de 15 lados es $\frac{180\,(15-2)}{15} = 156$, luego $\angle ABC = 156^\circ$. Además sabemos que:

$$\begin{aligned} \angle ABC + \angle CBZ + \angle ZBA &= 360^\circ \\ 156^\circ + 60^\circ + \angle ZBA &= 360^\circ \\ \angle ZBA &= 144^\circ \end{aligned}$$

Por lo tanto el póligono de n lados cumple que:

$$\frac{180 \cdot (n-2)}{n} = 144$$

Resolviendo la ecuación obtenemos que $n = 10$.

Problema 207. Las igualdades: $k = (2014 + m)^{1/n} = 1024^{1/n} + 1$ son dadas para enteros positivos k, m, n. ¿Cuántos valores diferentes puede tomar la cantidad m?

Solución. Claramente para que k sea entero $1024^{1/n} = \sqrt[n]{1024} = \sqrt[n]{2^{10}}$ debe ser entero, esto se cumple solo si, $n = 2$, $n = 5$ o $n = 10$. Analicemos estos tres casos:

1.

$$
\begin{aligned}
n = 2 \Longrightarrow k = \sqrt[n]{2014 + m} = \sqrt[n]{1024} + 1 = \sqrt[2]{1024} + 1 &= 33 \\
\Longrightarrow \sqrt[2]{2014 + m} &= 33 \\
2014 + m &= 33^2 \\
m &= 1089 - 2014 \\
m &= -915
\end{aligned}
$$

2.

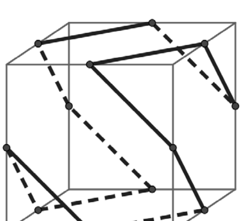
$$
\begin{aligned}
n = 5 \Longrightarrow k = \sqrt[n]{2014 + m} = \sqrt[n]{1024} + 1 = \sqrt[5]{1024} + 1 &= 5 \\
\Longrightarrow \sqrt[5]{2014 + m} &= 5 \\
2014 + m &= 5^5 \\
m &= 3125 - 2014 \\
m &= 1111
\end{aligned}
$$

3.

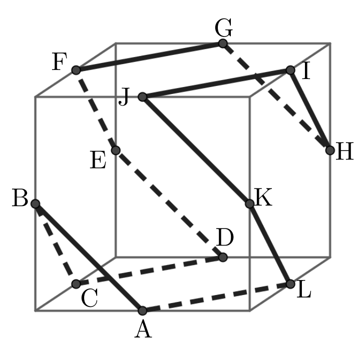
$$
\begin{aligned}
n = 10 \Longrightarrow k = \sqrt[n]{2014 + m} = \sqrt[n]{1024} + 1 = \sqrt[10]{1024} + 1 &= 33 \\
\Longrightarrow \sqrt[10]{1024 + m} &= 33 \\
2014 + m &= 310 \\
m &= 59049 - 2014 \\
m &= 57035
\end{aligned}
$$

Como m es un entero positivo concluimos que solo puede tomar 2 valores distintos, $m_1 = 1111$ y $m_2 = 57035$.

Problema 208. El diagrama muestra una poligonal cuyos vértices son los puntos medios de las aristas de un cubo. Un ángulo interior de la poligonal está definido de la forma habitual: el ángulo entre los dos bordes se encuentran en un vértice. ¿Cuál es la suma de todos los ángulos interiores de la poligonal?



Solución.



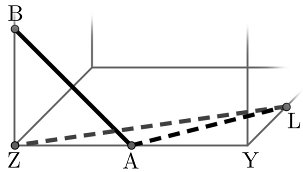
Notemos que:

- $AB = BC = CA \Longrightarrow \triangle ABC$ es equilátero $\Longrightarrow \angle ABC = 60^{\circ}$.
- $GH = HI = IG \Longrightarrow \triangle GHI$ es equilátero $\Longrightarrow \angle GHI = 60^{\circ}$.
- $EF = FG = GE \Longrightarrow \triangle EFG$ es equilátero $\Longrightarrow \angle EFG = 60^{\circ}$.

Además:

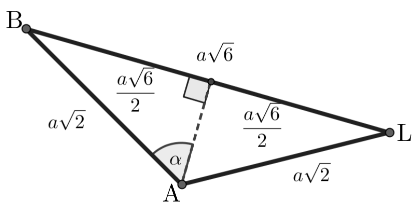
- $AB = AL \Longrightarrow \triangle ABL$ es isósceles.
- $BC = CD \Longrightarrow \triangle BCD$ es isósceles.
- $DE = EF \Longrightarrow \triangle DEF$ es isósceles.
- $LK = KJ \Longrightarrow \triangle LKJ$ es isósceles.
- $EF = FG \Longrightarrow \triangle EFG$ es isósceles.
- $KJ = JI \Longrightarrow \triangle KJI$ es isósceles.

Además, estos 6 tiángulos nombrados anteriormente son congruentes. Sea $2a$ el lado del cubo. Entonces $\triangle BZA$ y $\triangle AYL$ son rectángulos isósceles, de modo que $BA = AL = \sqrt{2}a$.



Además $\triangle ZYL$ es rectángulo de catetos $2a$ y a, por lo que su hipotenusa $ZL = \sqrt{5}a$. Observemos también que $\triangle BZL$ es rectángulo de catetos a y $\sqrt{5}a$, luego su hipotenusa $BL = \sqrt{6}a$.

El triángulo BAL es isósceles, es fácil notar que la altura marcada en la figura es $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, por lo que el triángulo BAL está compuesto por dos triángulos, cuyos ángulos son 30º, 60º y 90º. Por lo tanto $\alpha = 60º$.



Por último concluimos que:

$\angle BAL = \angle BCD = \angle FED = \angle FGH = \angle JKL = \angle JIH = \angle \mathrm{FGH} = 120º$

Finalmente la suma de los ángulos interiores del polígono es $120 \cdot 6 + 60 \cdot 6 = 1080º$.

Problema 209. La función f : $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ satisface las condiciones $f(4)= 6$ y $x \cdot f(x)= (x - 3) \cdot f(x + 1)$. ¿Cuál es el valor de $f(4) \cdot f(7) \cdot f(10) \cdot ... \cdot f(2011) \cdot f(2014)$?

Solución. Notemos que $x \cdot f(x) = (x-3) \cdot f(x+1) \Longrightarrow \mathrm{f}(x) = \frac{(x-3)}{x} \cdot f(x+1)$, además $f(4) = 6 = 2 \cdot 3$, luego:

- $f(4) = \frac{1}{4} \cdot f(5) \Longrightarrow f(5) = f(4) \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 4$
- $f(5) = \frac{2}{5} \cdot f(6) \Longrightarrow f(6) = f(5) \cdot \frac{5}{2} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{5}{2} = 3 \cdot 4 \cdot 5$

- $f(6) = \frac{3}{6} \cdot f(7) \Longrightarrow f(7) = f(6) \cdot \frac{6}{3} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{6}{3} = 4 \cdot 5 \cdot 6$
- $f(7) = \frac{4}{7} \cdot f(8) \Longrightarrow f(8) = f(7) \cdot \frac{7}{4} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{7}{4} = 5 \cdot 6 \cdot 7$
- $f(8) = \frac{5}{8} \cdot f(9) \Longrightarrow f(9) = f(8) \cdot \frac{8}{5} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \frac{8}{5} = 6 \cdot 7 \cdot 8$
- $f(9) = \frac{6}{9} \cdot f(10) \Longrightarrow f(10) = f(9) \cdot \frac{9}{6} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \frac{9}{6} = 7 \cdot 8 \cdot 9$

…

- $f(2013) = \frac{2010}{2013} \cdot f(2014) \Longrightarrow f(2014) = 2011 \cdot 2012 \cdot 2013$

De este modo:

$$f(4) \cdot f(7) \cdot f(10) \cdot \ldots \cdot f(2011) \cdot f(2014) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2013 = 2013!$$

Problema 210. En los bosques de una isla mágica viven tres tipos de animales: leones, lobos y cabras. Los lobos pueden comer cabras, y los leones pueden comer lobos o cabras. Sin embargo, siendo esta una isla mágica, si un lobo se come una cabra, se convierte en león. Si un león se come una cabra, se convierte en lobo. Si un león se come un lobo, se convierte en una cabra. Originalmente, había 17 cabras, 55 lobos y 6 leones en la isla. En algún momento quedará un cierto número de animales que no podrá comerse entre ellos. ¿Cuál es el mayor número de animales que puede quedar en la isla?

Solución. Observemos que después de un tiempo, solo sobrevivirá uno de los tres tipo de animales, claramente sobrevivirán los leones cuyo número debemos maximizar. En una primera iteración nos damos cuenta que el número máximo de leones debe ser 23, ya que la única manera de que los otros animales se transformen en leones, es que los lobos se coman la totalidad de las cabras, es decir, 17 lobos se comen 17 cabras obteniendo 23 leones y 38 lobos. Luego existen muchas formas de mantener la cantidad máxima de 23 leones, siendo la más evidente la de iterar de la siguiente manera:

Leon	Lobo	Cabra
23	38	0
22	37	1
23	36	0
22	35	1
23	34	0
…	…	
23	2	0
23	1	1
23	0	0

Problema 211. Marcos tiene 9 dulces y Benjamín tiene 17 dulces. ¿Cuántos dulces necesita regalarle Benjamín a Marcos para que cada uno tenga el mismo número de dulces?

Solución. Esto equivale a juntar los $9 + 17 = 26$ dulces y repartirlos en partes iguales, es decir, 13 dulces para cada uno, por lo tanto, Benjamín necesita regalarle $17 - 13 = 4$ dulces a Marcos.

Problema 212. La mamá de Verónica compró 2 pizzas para el cumpleaños de su hija. La mamá cortó cada pizza en 8 partes, si en el cumpleaños había 14 niñas incluyendo a Verónica. ¿Cuántas rebanadas de pizza sobran si la madre le da un trozo de pizza a cada niña?

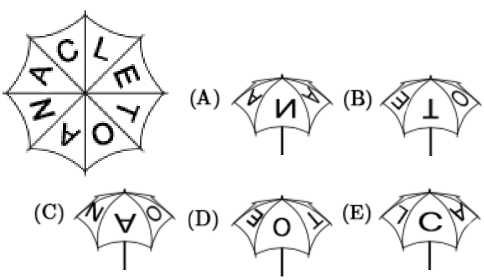
Solución. Como la madre de Verónica obtuvo 8 trozos de cada una de los pizzas, en total obtuvo $8 \cdot 2 = 16$ pedazos de pizzas. Como dichos trozos los repartió entre 14 niñas, entonces sobraron 2 trozos.

Problema 213. Hay 11 banderas ubicadas en línea recta a lo largo de una pista de carrera. La primera bandera Está en la partida y la última en la meta. La distancia entre cada bandera es de 8 metros. ¿Cuál es la medida de la pista?

Solución. Notemos que 11 banderas dividen la pista en 10 intervalos, por lo tanto, la pista mide $10 \cdot 8 = 80$ metros.

Problema 214. Mi paraguas tiene la palabra ANACLETO escrita en la parte interior como se muestra en la imagen (mirando desde abajo del paraguas). ¿Cuál de las siguientes imágenes muestra la parte exterior de mi paraguas (mirado desde arriba del paraguas)?

Solución. Notemos que al ver el paraguas desde arriba, este tendrá la apariencia que muestra la figura, donde claramente la única alternativa verdadera es la (C).



Problema 215. Un barco fue atacado por piratas. Los piratas se formaron en fila y uno por uno fueron ingresando al barco por una cuerda. El capitán pirata estaba en el medio de la fila y en el octavo lugar desde el principio de la fila. ¿Cuántos piratas estaban en la fila?

Solución. Si el capitán está en el octavo lugar, entonces hay 7 piratas delante de él, y como además está en el centro de la fila, se sabe que también hay 7 piratas detrás de él, por lo tanto, en la fila hay $7 + 1 + 7 = 15$ piratas.

Problema 216. Durante 3 días Tom, el gato, estuvo cazando ratones. Cada día Tom cazaba 2 ratones más de los que había cazado en el día anterior. En el tercer día Tom cazó el doble de

Solución. Como cada día Tom suma dos ratones más a su cacería, en el tercer día Tom capturó $2 + 2 = 4$ ratones más de los que había capturado en el primer día; Y como Tom el tercer día ha cazado el doble de ratones de los que cazó el primer día, se deduce que el primer día capturó 4, pues si r es el número de ratones que cazó el primer día, se tiene que $r + 2 + 2 = 2r \Rightarrow r = 4$.

ratones de los que cazó el primer día. ¿Cuántos ratones cazó en total Tom durante los 3 días?

Finalmente el primer día cazó 4 ratones, el segundo día cazó $4 + 2 = 6$ ratones y el tercer día cazó $6 + 2 = 8$ ratones, por lo tanto, Tom cazó $4 + 6 + 8 = 18$ ratones durante los 3 días.

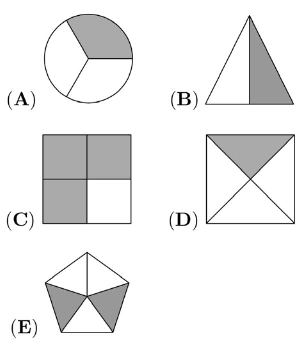
Problema 217. Ricardo y Sebastián están construyendo un iglú. Por cada hora que pasa, Ricardo hace 8 ladrillos de hielo y Sebastián hace dos ladrillos menos que Ricardo. ¿Cuántos ladrillos hacen juntos en tres horas?

Solución. Ricardo en una hora hace 8 ladrillos, por lo tanto, en 3 horas hace $3 \cdot 8 = 24$ ladrillos. Seba en una hora hace $8-2 = 6$ ladrillos, por lo tanto, en 3 horas hace $3 \cdot 6 = 18$ ladrillos. Luego en tres horas hacen $24+18 = 42$ ladrillos.

Problema 218. Nos fuimos a un campamento de verano ayer a las 4:32 PM y llegamos a nuestro destino de hoy a las 6:11 AM. ¿Cuánto tiempo duró el viaje?

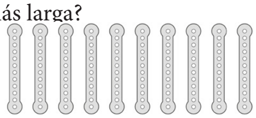
Solución. Desde las 4:32 PM hasta las 5:00 PM han transcurrido 28 minutos, desde las 5:00 PM hasta las 00:00 AM han transcurrido 7 horas, desde las 00:00 AM hasta las 6:11 AM, han transcurrido 6 horas 11 minutos; Por lo tanto, han transcurrido $7 + 6 = 13$ horas con $28 + 11 = 39$ minutos.

Problema 219. ¿En Cuál de las siguientes figuras se ha sombreado la mitad?

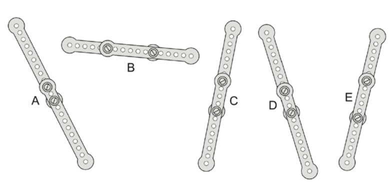


Solución. Solo en la figura *B* se ha sombreado la mitad, en la figura *A* se ha sombreado $\frac{1}{3}$, en la figura *C* se han sombreado $\frac{3}{4}$, en la figura *D* se ha sombreado $\frac{1}{4}$ y en la figura *E* se han sombreado $\frac{2}{5}$.

Problema 220. Hernán tenía 10 tiras de metal iguales. Él ha formado pares de tiras, creando cinco tiras largas. ¿Qué tira es la más larga?



Solución. La tira más larga será aquella en la cuál queden menos orificios sobrepuestos, es decir, la tira *A*.

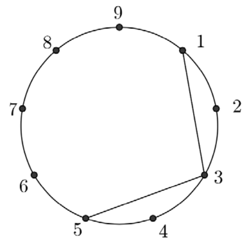


Problema 221. Si cada figura oculta un número y figuras iguales ocultan números iguales. ¿Qué número se oculta detrás de cada figura?

Solución. Como $\triangle + 4 = 7$, entonces $\triangle = 3$. Si $\triangle = 3$, tenemos en la segunda igualdad que $\square + 3 = 9$, entonces $\square = 6$.

$$\triangle + 4 = 7 \qquad \square + \triangle = 9$$

Problema 222. Dados 9 puntos en un círculo, se trazan segmentos a partir del punto 1 siempre saltando el punto vecino. Si realizamos este procedimiento hasta volver al primer punto, determine por cuántos puntos pasamos incluyendo el punto inicial.



Solución. Como se trata de saltarnos un punto, si comenzamos por el punto 1, trazamos el segmento hasta el punto 3, luego, hasta el punto 5; luego, al 7 y al 9; pero de este modo no hemos llegado hasta el punto 1, por lo tanto, seguimos el trazado hasta el punto 2, luego, hasta el punto 4; luego, al 6 y al 8, terminando el trazado en el punto 1. Es decir, pasamos por los 9 puntos del círculo.

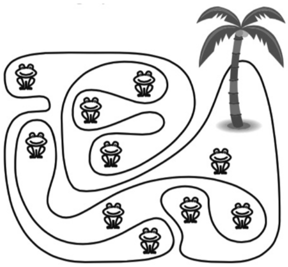
Problema 223. Lucas tenía 7 cangu-monedas de \$1, 9 cangu-monedas de \$2 y 3 cangu-billetes de \$10. Él fue a una tienda en la que compró una pelota que costó \$37. ¿Cuánto dinero tiene Lucas al salir de la tienda?

Solución. Como tenía 7 cangumonedas de \$1, 9 cangumonedas de \$2 y 3 cangubilletes de \$10, Lucas tenía $7 + 18 + 30 = 55$ pesos. Como él compro una pelota en \$37, entonces al salir de la tienda Lucas tiene $55-37 = 18$ pesos.

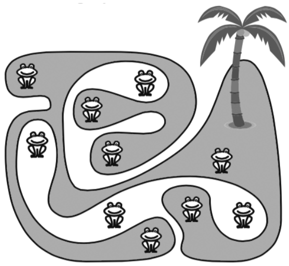
Problema 224. Un número entero tiene dos dígitos. El producto de los dígitos de este número es 15, ¿Cuál es la suma de los dígitos de este número?

Solución. Notemos que la descomposición 15 es $15 = 5 \cdot 3$, o $15 = 15 \cdot 1$, por lo tanto, los dígitos de dicho número son 5 y 3 cuya suma es 8.

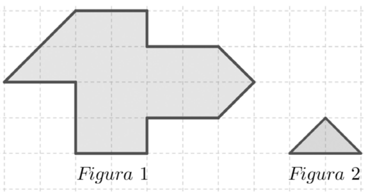
Problema 225. En la figura, vemos una isla con una costa muy extraña y varias ranas. ¿Cuántas ranas están en la isla?



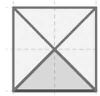
Solución. Para visualizar de mejor manera cuántas ranas hay en la isla, vamos a sombrear la isla. De este modo, nos damos cuenta que hay 6 ranas en la isla.



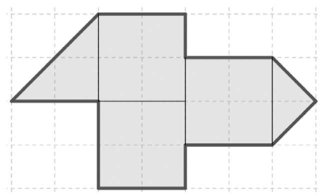
Problema 226. Alonso ha recortado a partir de un papel cuadriculado la forma que se muestra en la Figura 1. Ahora él quiere recortar esta forma en triángulos idénticos como los de la Figura 2. ¿Cuántos triángulos podrá conseguir?



Solución. Observemos que el tríangulo de la Figura 2 es la cuarta parte de cuadrado de lado 2, el cual nos ayuda a completar la figura.



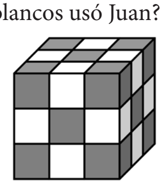
Luego podemos rellenar la figura con tres cuadrados que equivalen a $3 \cdot 4 = 12$ triángulos, pudiendo aún rellenar la figura con dos triángulos a la izquierda y un triángulo a la derecha. Finalmente, a partir de la figura se pueden obtener $12 + 2 + 1 = 15$ triángulos como los de la Figura 2.



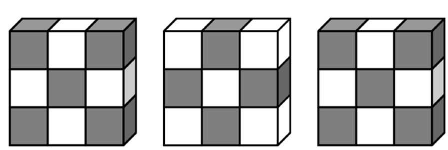
Problema 227. Luis tiene 7 manzanas y 2 plátanos. Él regala 2 manzanas a Mónica y Mónica le da a cambio algunos plátanos a Luis. Ahora Luis tiene la misma cantidad de manzanas que de plátanos. ¿Cuántos plátanos le dio Mónica a Luis?

Solución. Luis tiene 7 manzanas y 2 plátanos. Cuando le da 2 manzanas a Mónica, queda con 5 manzanas y 2 plátanos. Como Luis ahora tiene la misma cantidad de manzanas que de plátanos, entonces tiene 5 plátanos, por consiguiente, Mónica le dio $5 - 2 = 3$ plátanos.

Problema 228. Juan construyó el cubo de la figura usando 27 pequeños cubos que son de color blanco o negro, de modo que siempre dos cubos pequeños que comparten una cara tienen distinto color. ¿Cuántos cubos blancos usó Juan?



Solución. Para contar de la cantidad de cubos blancos que usó Juan dibujaremos la sección frontal, media y trasera del cubo, obteniendo $4 + 5 + 4 = 13$ cubos blancos.



Problema 229. En una carrera de velocidad, 10 participantes llegaron a la final. Tomás superó a 3 corredores más de los que no lo alcanzó. ¿En qué lugar terminó Tomás?

Solución. Notemos que los corredores que Tomás no alcanzó y los corredores que Tomás sí alcanzó suman un total de 9 corredores, pues él no cuenta. Como Tomás superó a 3 corredores más de los que no lo alcanzó, entonces Tomás superó a 6 corredores y no pudo alcanzar a 3 corredores, terminando en cuarto lugar.

Usando ecuaciones se tiene: Sea x la cantidad de corredores a los que Tomás no pudo alcanzar, como Tomás superó a 3 corredores más de los que no lo alcanzó, entonces Tomás superó a $x + 3$ participantes, luego:

$$x + x + 3 = 9 \Longrightarrow 2x = 6 \Longrightarrow x = 3$$

Problema 230. Silvana tiene 4 juguetes: un autito, una muñeca, una pelota y un barco. Silvana dejará sus juguetes en una repisa, de modo que el autito siempre esté entre el barco y el muñeco. ¿De Cuántas maneras se pueden ordenar los juguetes en la repisa?

Solución. Como Silvana quiere que el autito (A) siempre esté entre el barco (B) y el muñeco (M), entonces, las únicas dos posibles posiciones para ellos tres son:

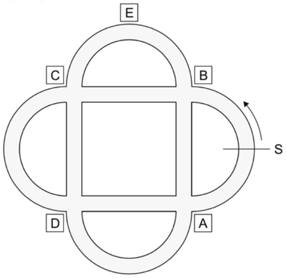
$$BAM \qquad MAB$$

Por lo tanto, en cada uno de estos casos la pelota (P) puede ubicarse o a la izquierda o a la derecha. Luego, las posibles posiciones son:

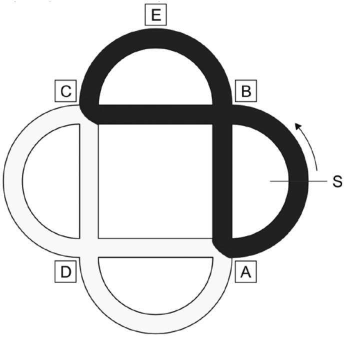
$$BAM - P \qquad P - BAM \qquad MAB - P \qquad P - MAB$$

Finalmente, hemos encontrado 4 formas de ordenar los juguetes en la repisa.

Problema 231. Pedro pasea por el parque en su bicicleta como muestra la figura, iniciando el recorrido en el punto S y siguiendo la dirección de la flecha. En el primer cruce se gira a la derecha; luego, en el siguiente cruce, se gira a la izquierda; luego, a la derecha; luego, a la izquierda otra vez y así sucesivamente en ese orden, ¿Por Cuál de las letras del recorrido nunca va a pasar?



Solución. Siguiendo el recorrido enunciado, Pedro siempre pasará solo por el camino sombreado, por lo tanto, Pedro nunca pasará por la letra D.



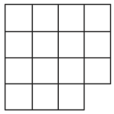
Problema 232. Hay 5 chinitas. Dos chinitas son amigas si el número de manchas que tienen difiere exactamente en una mancha. En el Día Canguro, cada una de las chinitas envía a cada una de sus amigas un saludo por SMS. ¿Cuántos saludos SMS fueron enviados?

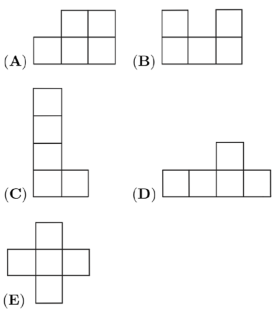
Solución.

- La chinita de 2 manchas envía 2 SMS, uno a cada chinita de 3 manchas.
- Las chinitas de 3 manchas envían 1 SMS cada una, a la chinita de 2 manchas.
- La chinitas de 5 manchas envía 1 SMS, a la chinita de 6 manchas.
- La chinitas de 6 manchas envía 1 SMS, a la chinita de 5 manchas.

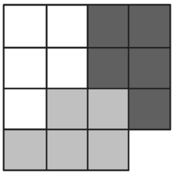
En total se envían 2 + 2 + 1 + 1 = 6 sms.

Problema 233. La siguiente figura fue armada con tres piezas idénticas. ¿Cuál de las siguientes piezas permite esto?

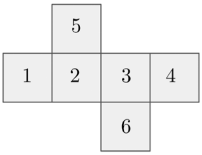




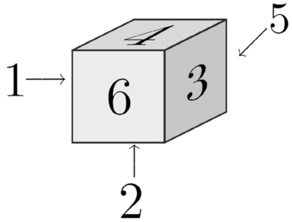
Solución. Solo la pieza A permite armar la figura, como se muestra a continuación. Se deja abierto al lector el comprobar que las otras piezas no permiten armar la figura.



Problema 234. En la figura se muestra la red de un cubo con caras numeradas, Sofía suma las parejas de números ubicados en las caras opuestas de este cubo. ¿Cuáles son los tres resultados obtenidos por Sofía?



Solución. Al armar el cubo las caras que quedan opuestas son las caras 1 y 3, 2 y 4, 5 y 6, donde 1+3 = 4, 2+4 = 6, 5+6 = 11. Finalmente los tres resultados obtenidos por Sofía son 4, 6 y 11.



Problema 235. ¿Cuál de los siguientes números no es un número entero?

a. $\frac{2012}{2}$ **d.** $\frac{2015}{5}$
b. $\frac{2013}{3}$ **e.** $\frac{2016}{6}$
c. $\frac{2014}{4}$

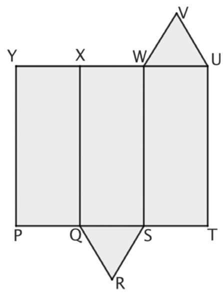
Solución. Notemos que 2012 es par, por lo tanto, es divisible por 2, luego $\frac{2012}{2}$ es entero. Los dígitos de 2013 suman 6, por lo tanto, es divisible por 3, luego $\frac{2013}{3}$ es entero. El número 2015 termina en 5, por lo tanto, es divisible por 5, luego $\frac{2015}{5}$ es entero. Los dígitos de 2016 suman 9 (múltiplo de 3), además, es par, por consiguiente, es divisible por 6; luego, $\frac{2016}{6}$ es entero.

Por último, $2014 \div 4 = 1007 \div 2$ y 1007 no es par, luego, $\frac{2014}{4}$ no es entero.

Problema 236. Un viaje desde Temuco a Valdivia pasando por la casa del abuelo Anacleto dura 130 minutos. La parte del viaje desde Temuco a la casa del abuelo dura 35 minutos. ¿Cuánto tiempo dura la parte del viaje desde la casa del abuelo hasta Valdivia?

Solución. Claramente, el tiempo que dura la parte del viaje desde la casa del abuelo hasta Valdivia, es la diferencia entre el tiempo total y el tiempo que ya recorrió, es decir $130 - 35 = 95$ minutos.

Problema 237. El diagrama muestra la red de un prisma triangular. Al armar el prisma, ¿Qué arista coincide con la arista *UV*?



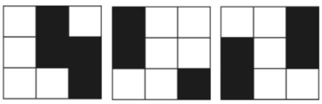
Solución. Al plegar la red, comenzamos uniendo el lado *UT* con *Y P*; luego, en la parte superior se une el punto *V* con el punto *X*, obligando a que coincidan los lados *XW* con *WV* y los lados *Y X* con *V U*.

Problema 238. Un triángulo tiene lados de longitudes de 6, 10 y 11. Un triángulo equilátero tiene el mismo perímetro. ¿Cuál es la longitud del lado del triángulo equilátero?

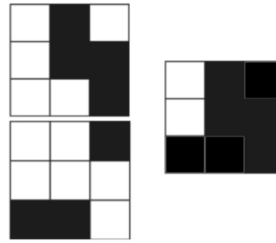
Solución. El perímetro del triangulo dado es $6 + 10 + 11 = 27$, por lo que el perímetro del triángulo equilátero también es 27. Luego, como este tiene todos sus lados iguales, la longitud del lado es $27 \div 3 = 9$ unidades.

Problema 239. Tenemos tres hojas transparentes con los patrones mostrados en la figura. Estas solamente se pueden rotar, por lo que no se pueden voltear.

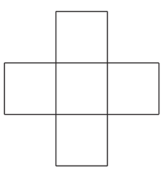
Solución. Utilizando las dos primeras hojas, el arreglo óptimo sería girar en sentido antihorario la segunda figura en 90º y superponer estas dos hojas, de modo que se vean 7 casillas negras tal como se muestra en la figura. Ahora, con la tercera hoja intentaremos llenar las casillas que aún siguen transparentes, Si ponemos exactamente una encima de la otra y miramos el montón desde arriba. ¿Cuál es el máximo número posible de casillas negras visto en el montón?



pero, solo se puede cubrir una de ellas, alcanzando un máximo de 8 casillas negras.



Problema 240. Los números 2, 3, 5, 6 y 7 se escriben en los casilleros de la cruz (ver figura), de modo que la suma de los números de la fila es igual a la suma de los números de la columna. ¿Cuál de estos números puede escribirse en el casillero del centro de la cruz?



Solución. Notemos que 2+3+5+6+7 = 23, y 23 es impar. Sea S la suma de los números de la columna, la que es igual la suma de los números de la fila, por lo tanto, al sumar el resultado de la columna con el resultado de la fila obtenemos $2S$. Notemos que en $2S$ uno de estos números aparece 2 veces en la suma. Como 23 es impar, y $2S$ es par, necesariamente el número del centro debe ser impar para que al sumarse dos veces el resultado sea par. Por otra parte, el número 3 no puede estar en el centro, de ser así la fila debería sumar $(23 + 3) \div 2 = 13$ y la columna debería sumar 13, lo que es imposible con los números dados. Si el número del centro fuera el 5, la fila debería sumar $(23 + 5) \div 2 = 14$ y la columna debería sumar 14, lo cual es posible $2 + 5 + 7$ y $3 + 5 + 6$. Si el número del centro fuera el 7, la fila debería sumar $(23+ 7)\div 2 = 15$ y la columna debería sumar 15, lo cual es posible $3 + 7 + 5 = 15$ y $2 + 7 + 6 = 15$. Luego en el centro puede estar el 5 o el 7.

Problema 241. Raúl tiene diez cartas numeradas del 0 al 9. ´El distribuyó estas cartas entre tres amigos: Fernando sacó 3 cartas, Gregorio, 4 cartas y Andrés, 3 cartas. Luego, Raúl multiplicó los números de las cartas que consiguió cada uno de los amigos y los resultados fueron: 0 para Fernando, 72 para Gregorio y 90 para Andrés. ¿Cuál es la suma de los números en las cartas que Fernando recibió?

Solución. Claramente Fernando tiene la carta 0, pues el producto de los números de sus cartas es cero. Como Gregorio sacó 4 cartas, entonces factorizamos 72 en 4 números menores o iguales que 9 y distintos:

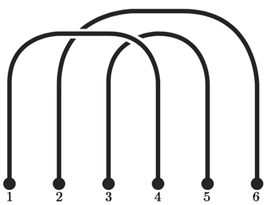
$$72 = 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 1 \text{ o bien } 72 = 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 1$$

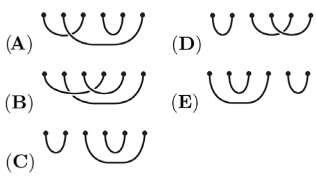
Como Andrés sacó 3 cartas, entonces factorizamos 90 en 3 números distintos menores o iguales que 9:

$$90 = 5 \cdot 2 \cdot 9 \text{ o bien } 90 = 3 \cdot 5 \cdot 6$$

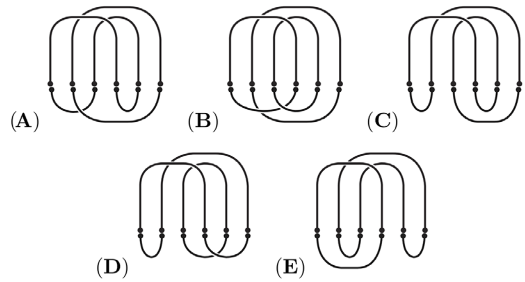
Si Gregorio sacó las cartas 3, 4, 6, 1, entonces, Andrés sacó las cartas 9, 5, 2, dejandole a Fernando las cartas 0, 7 y 8. Del mismo modo si Gregorio sacó las cartas 2, 4, 9, 1, entonces, Andrés sacó las cartas 3, 5, 6, dejandole a Fernando las cartas 0, 7 y 8. Por lo tanto, de cualquier manera, la suma de las cartas de Fernando es 15.

Problema 242. Tres cuerdas se ponen en el suelo como se muestra en la figura, quedando los extremos de las cuerdas alineados. Usted puede hacer una cuerda más grande agregando otros tres trozos de cuerda y uniendo los extremos de estos trozos a los trozos anteriores. ¿Cuál de las cuerdas que se muestran a continuación le dará una cuerda más grande?

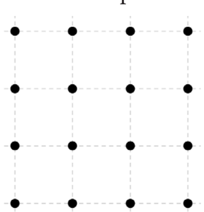




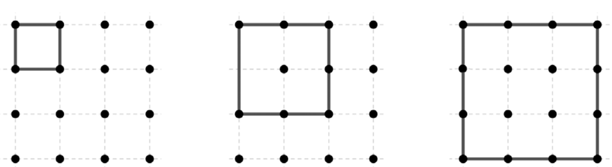
Solución. Lo más directo es dibujar cada uno de los 6 posibles lazos y recorrerlos completamente, dándonos cuenta que la alternativa que deja solo un lazo y por lo tanto el más grande es la alternativa *C*.



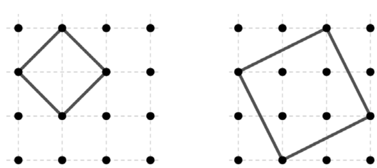
Problema 243. Se tienen 16 puntos en una hoja cuadriculada. Si de estos puntos se eligen 4 puntos que formen un cuadrado. ¿Cuántos cuadrados de distintas áreas es posible hacer?



Solución. Es natural construir cuadrados utilizando las lineas del cuadriculado como referencia para los lados, de este modo podemos construir los 3 cuadrados que se muestran a continuación:



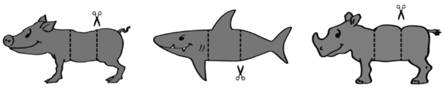
Cuyos lados miden 1, 2 y 3 unidades respectivamente. Ahora usando puntos que estén en distintas lineas del cuadriculado, podemos hacer solo 2 cuadrados, los cuales se muestran a continuación:



Estos tienen lado de medida $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$ unidades respectivamente.

Problema 244. Simón dibuja un tiburón, un cerdo y un rinoceronte, y los corta en tres piezas cada uno como se muestra en la figura. Entonces él puede hacer distintos animales mediante la combinación de una cabeza, un tronco y una parte inferior. ¿Cuántos animales distintos, reales o de fantasía puede crear Simón?

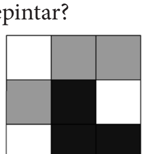
Solución. Para hacer un animal elegiremos primero la cabeza, teniendo 3 maneras de hacerlo, luego, por cada una de las cabezas que elijamos podemos elegir entre tres posibles troncos, es decir, llevamos $3 \cdot 3 = 9$ animales distintos solo uniendo cabezas con troncos, luego, para cada uno de estos animales podemos elegir 3 partes inferiores, es decir, se pueden formar $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ animales.



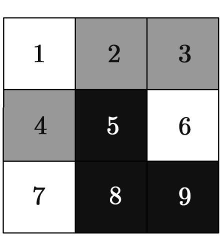
Problema 245. Ana, Beto, Carlos, David y Elisa cocinan galletas durante todo el fin de semana. Ana hizo 24 galletas; Beto, 25. Carlos, 26. David, 27; y Elisa, 28. Al terminar el fin de semana uno de ellos tenía el doble de las galletas que tenía el día sábado, uno 3 veces, uno 4 veces, uno 5 veces y uno 6 veces las galletas que tenía el día sábado. ¿Quién cocinó más galletas el día sábado?

Solución. Notemos que entre los números 24, 25, 26, 27 y 28, solo el 25 es múltiplo de 5, luego, Beto Cocinó $25 \div 5 = 5$ galletas el día sábado. Además, 27 es múltiplo de 3, y como no es múltiplo de 2, ni de 4, ni de 6, entonces, necesariamente David cocinó $27 \div 3 = 9$ galletas el día sábado. El número 26 es múltiplo de 2 no es múltiplo de 4 ni de 6, por lo tanto, es el múltiplo de 2, luego Carlos cocinó $26 \div 2 = 13$ galletas. El número 28 es múltiplo de 4 y no es múltiplo de 6, luego Elisa cocinó $28 \div 4 = 7$ galletas. Por último, como 24 es múltiplo de 6, Ana hizo $24 \div 6 = 4$ galletas. Por lo tanto, la persona que cocinó más galletas el día sábado fue Carlos.

Problema 246. Samuel pintó los 9 cuadrados con los colores negro, blanco y gris, como se muestra en la figura. Samuel quiere volver a pintar de manera que no queden dos cuadrados de un mismo color con un lado común, ¿Cuál es la mínima cantidad de cuadrados que se deben repintar?



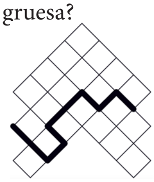
Solución. Notemos que necesitamos cambiar el color o de la casilla 2 o de la casilla 3, siendo conveniente repintar la casilla 3 de color negro, además necesitamos cambiar de color de la casilla 5 o de la 8 o de la 9, siendo conveniente repintar la casilla 8 de color gris. De este modo como mínimo debemos repintar 2 casillas.



Problema 247. Hay 10 patas. 5 de estas patas ponen un huevo cada día, mientras que las otras 5 ponen un huevo día por medio. ¿Cuántos huevos ponen las 10 patas en un plazo de 10 días?

Solución. Como 5 de estas patas ponen un huevo cada día, entonces en 10 días estas patas ponen $5 \cdot 10 = 50$ huevos en total. Como las otras 5 patas ponen un huevo día por medio, entonces en 10 días ponen 5 huevos cada una, luego ellas ponen $5 \cdot 5 = 25$ huevos en total. Finalmente, las 10 patas en un plazo de 10 días ponen 75 huevos.

Problema 248. La figura muestra una tabla en la que cada cuadrado pequeño tiene un área de 4 cm^2. ¿Cuál es la longitud de la línea gruesa?



Solución. Recordemos que para un cuadrado de lado a, su área es a2, por lo tanto si cada cuadrado pequeño tiene un área de 4 cm2, la medida de su lado es 2 cm. Como la linea gruesa recorre 9 lados de los cuadrados pequeños, se tiene que la longitud de la linea gruesa es $9 \cdot 2 = 18$ cm.

Problema 249. ¿Cuál de las siguientes fracciones es menor que 2?

a. $\frac{19}{8}$

b. $\frac{20}{9}$

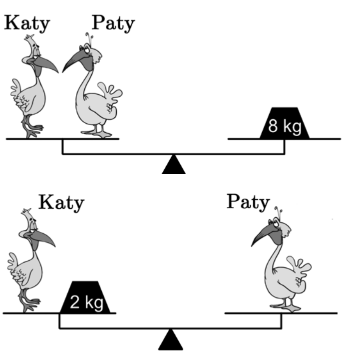
c. $\frac{21}{10}$

d. $\frac{22}{11}$

e. $\frac{23}{12}$

Solución. Notemos que, exceptuando la fracción E, en todas las fracciones el numerador es mayor al doble del denominador, luego, la única fracción menor que 2 es $\frac{23}{12}$.

Problema 250. ¿Cuánto pesa Paty?



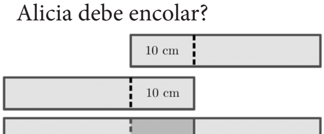
Solución. Katy y Paty juntas pesan 8 kilos. El segundo gráfico nos indica que Paty es dos kilos más pesada que Katy, es decir, Paty pesa 5 kilos y Katy pesa 3 kilos. También podriamos habernos planteado las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} K + \mathrm{P} &= 8 \\ K + 2 &= \mathrm{P} \end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones se tiene que:

$$K - K + P - 2 = 8 - P \Rightarrow 2P = 10 \Rightarrow P = 5.$$

Problema 251. Alicia tiene 4 tiras de papel de la misma longitud, cada una con una solapa de 10 cm. Ella encola 2 de estas solapas y forma una tira de 50 cm de largo (pegando las solapas). Con las otras dos tiras de papel, ella quiere hacer una tira de 56 cm de largo. ¿Cuál debería ser el tamaño de la solapa que Alicia debe encolar?

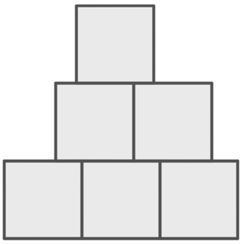


Solución. Sea x la medida del trozo de tira sin contar la solapa, como la solapa mide 10 cm y las dos tiras al solaparse forman una nueva tira de 50 cm de largo, se tiene que $x + 10 + x = 50$:

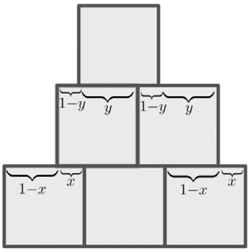
Luego, $2x = 40 \Rightarrow x = 20$. Como ahora queremos formar una nueva tira de 56 cm, debemos formar con las solapas un trozo de $56 - 40 = 16$ cm. Sea z el trozo de tira que queremos encolar, se tiene que, $10 - z$ es el trozo de tira que no queremos encolar, ahora se debe cumplir que $10 - z + z + 10 - z = 16 \Rightarrow z = 4$:

Por lo que debemos encolar un trozo de $z = 4$ cm para hacer una tira de 56 cm de largo.

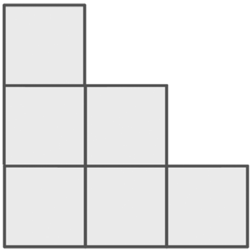
Problema 252. Tomás utiliza 6 cuadrados del lado 1 y forma la figura de la imagen. ¿Cuál es el perímetro de esta figura?



Solución. Notemos que al apilar los cuadrados existen algunas medidas que se repiten, tal como muestra la figura. Viendo esto, podemos concluir que el perímetro de la figura es:



$$(1-x)+1+1+1+1+1+x+1+y+1+1+1+(1-y)+1=12$$



De otra manera, podemos notar que no importa la manera en que se dispongan los cuadrados de los niveles 2 y 3 de la torre, por lo tanto, la siguiente figura tiene el mismo perímetro que la figura original, luego, es facíl ver que el perímetro es 12 unidades.

Problema 253. Todos los días, Sofía anota la fecha y calcula la suma de los dígitos escritos. Por ejemplo, el 19 de marzo, lo escribe como 19/03 y calcula 1 + 9 + 0 + 3 = 13. ¿Cuál es la suma más grande que ella calcula durante el año?

Solución. Para la fecha pedida nos interesa ocupar los dígitosmás grandes posibles, por lo tanto intentamos ocupar el 9. En el caso de los días nos conviene el 29 y para el caso de los meses nos conviene el 09, luego, la suma más grande que ella calcula durante el año es 2 + 9 + 0 + 9 = 20.

Problema 254. En la calle Anacleto, hay 9 casas en una fila y al menos una persona vive en cada casa. Cada vez que sumamos los habitantes de dos casas vecinas obtenemos un máximo de 6 personas. ¿Cuál es el mayor número de personas que podrían estar viviendo en la calle Anacleto?

Solución. Como queremos saber cual es el mayor número de personas que podrían estar viviendo en la calle, nos interesa que en cada par casas vecinas vivan el mayor número de personas posibles, es decir, 6 personas. Claramente, en una casa no pueden vivir 6 personas, pues, al menos una persona vive en cada casa, entonces, los pares posibles son: 3+3 = 6, 4+2 = 6 y 5+1 = 6. Como en la calle hay un número impar de casas, debemos comenzar y terminar con el mayor número posible, por lo tanto, los habitantes por cada casa en la calle deberían ser:

5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5

Luego, en toda la calle viven a lo más 5+1+5+1+5+1+5+1+5 = 29 personas.

Problema 255. Lucía y su madre nacieron en enero. El día 19 de marzo de 2015, Lucía suma el año de su nacimiento con el año de nacimiento de su madre, con su edad y con la edad de su madre. ¿Qué resultado obtiene Lucía?

Solución. Sea x el año de nacimiento de Lucía, entonces Lucía tiene $2015-x$ años cumplidos. Sea y el año de nacimiento de su madre, entonces su madre tiene $2015-y$ años cumplidos. Por lo tanto, al sumar el año de nacimiento de Lucía con el año de nacimiento de su madre, con su edad y con la edad de su madre, se obtiene:

$$x + y + (2015 - x) + (2015 - y) = 2 \cdot 2015 = 4030$$

De otro modo, notemos que si el día 19 de marzo de 2015 sumamos el año de nacimiento de una persona con su edad, el resultado es 2015, por lo que la suma pedida es $2 \cdot 2015 = 4030$.

Problema 256. El área de un rectángulo es 12 cm2. Las longitudes de sus lados son números naturales. Entonces, el perímetro de este rectángulo podría ser:

a. 20 cm
b. 26 cm
c. 28 cm
d. 32 cm
e. 48 cm

Solución. Si el área de un rectángulo es 12 cm^2 y las longitudes de sus lados son números naturales, entonces sus lados pueden ser 12 y 1, pues $12 \cdot 1 = 12$, o bien 6 y 2, pues $6 \cdot 2 = 12$, o bien 3 y 4, pues $3 \cdot 4 = 12$. En el primer caso, el perímetro sería $2 \cdot 12+2 \cdot 1 = 26$ cm. En el segundo caso, el perímetro sería $2 \cdot 6+ 2 \cdot 2 = 16$ cm. En el tercer caso el perímetro sería $2 \cdot 3+2 \cdot 4 = 14$ cm. Por lo tanto, de entre las alternativas solo podría ser la (B).

Problema 257. En una bolsa hay 3 manzanas verdes, 5 manzanas amarillas, 7 peras verdes y 2 peras amarillas. Simón saca al azar frutas de la bolsa una por una. ¿Cuántas frutas debe sacar con el fin de estar seguro de que tiene al menos una manzana y una pera del mismo color?

Solución. En el peor de los casos, Simón podría sacar las 7 peras verdes y las 5 manzanas amarillas, acumulando 12 sacadas. De ser así, la décimo tercera vez que saca una fruta estará obligado a tomar o una manzana verde (pues ya sacó todas las manzanas amarillas), o bien una pera amarilla (pues ya saco todas las peras verdes), entonces Simón debe sacar 13 frutas con el fin de estar seguro de que tiene al menos una manzana y una pera del mismo color.

Problema 258. En la siguiente suma, incógnitas iguales representan dígitos iguales e incógnitas distintas representan dígitos distintos. ¿Cuál es el dígito que Está representado por la letra X?

$$\begin{array}{r} X \\ X \\ \underline{+\,Y\,Y} \\ Z\,Z\,Z \end{array}$$

Solución. Notemos que estamos sumando 2 números de 1 dígito con 1 número de 2 dígitos, obteniendo así un número de 3 dígitos iguales, por lo tanto, el único número de 3 dígitos que puede resultar de esta manera es el 111, luego:

$$\begin{array}{r} X \\ X \\ \underline{+\,Y\,Y} \\ 1\,1\,1 \end{array}$$

Por otra parte la suma $X + X + Y$ termina en 1, y esa suma a lo más es 26 (9 + 9 + 8), por lo tanto, $X + X + Y$ es 11 o es 21, pero no puede ser 11, ya que de ser así al sumar la penúltima columna Y valdría 0 lo cual no es posible, concluyendo que $X + X + Y = 21$. Además, se tiene que $Y = 9$ (pues la reserva 2 sumada con Y debe ser 11). Como Y es 9, entonces $X + X + 9 = 21 \Rightarrow 2X = 12 \Rightarrow X = 6$.

Problema 259. Marcela compró 3 juguetes. El primer juguete lo compró con la mitad de su dinero y \$1 más. Para el segundo juguete Marcela pagó la mitad del dinero restante y \$2 más. Por último, para el tercer juguete Marcela pagó la mitad del dinero restante y \$3 más. Si con este tercer juguete gastó todo su dinero, determine cuánto dinero tenía inicialmente.

Solución. Sea $8x$ el dinero que tenía Marcela inicialmente, entonces el primer juguete lo compró por $4x+1$ pesos, quedándole $4x-1$ pesos. Para el segundo juguete Marcela pagó $2x - \frac{1}{2} + 2$ pesos quedándole $2x - \frac{1}{2} - 2 = 2x - \frac{5}{2}$ pesos. Para el tercer juguete Marcela pagó $x - \frac{5}{4} + 3$ pesos quedándole $x - \frac{5}{4} - 3 = x - \frac{17}{4}$ pesos, y como Marcela quedó sin dinero, entonces $x - \frac{17}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{17}{4} \Rightarrow 8x = 34$. Finalmente, Marcela tenía \$34 inicialmente.

Comprobemos que 34 cumple lo pedido, de ser así, Marcela compró el primer juguete a $17+1 = 18$ pesos, quedandole $17-1 = 16$ pesos. Para el segundo juguete Marcela pagó $8+2 = 10$ pesos quedándole $8-2 = 6$ pesos. Para el tercer juguete Marcela pagó $3+3 = 6$ pesos quedando Marcela sin dinero.

Problema 260. El número 100 se multiplica o bien por 2 o bien por 3, entonces al resultado le suma 1 o 2, y luego el nuevo resultado se divide ya sea por 3 o por 4 y el resultado final es un número natural. ¿Cuál es el resultado final?

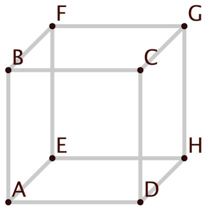
Solución.

- Cuando 100 se multiplica 2 se obtiene $100 \cdot 2 = 200$.
- Cuando 100 se multiplica 3 se obtiene $100 \cdot 3 = 300$.
- Cuando a 200 le sumamos 1 obtenemos $200+1 = 201$ que es divisible por 3 y no por 4.
- Cuando a 200 le sumamos 2 obtenemos $200 + 2 = 202$ que no es divisible por 3 ni por 4.
- Cuando a 300 le sumamos 1 obtenemos $300 + 1 = 301$ que no es divisible por 3 ni por 4.
- Cuando a 300 le sumamos 2 obtenemos $300 + 2 = 302$ que no es divisible por 3 ni por 4.
- Como el resultado final es un número natural, este es $201 \div 3 = 67$.

Problema 261. En un número de 4 dígitos $ABCD$, los dígitos A, B, C y D están en orden estrictamente creciente de izquierda a derecha. Con los dígitos B y D se forma un número de dos dígitos y con los dígitos A y C se forma un otro número de dos dígitos. ¿Cuál es la mayor diferencia posible entre el número de dos dígitos BD y el número de dos dígitos AC?

Solución. No interesa que el número AC sea lo menor posible y que el número BD sea lo mayor posible, sabiendo que $A < B < C < D$, entonces tomamos $A = 1$, además B a lo más puede ser 7, para que $C = 8$ y $D = 9$. De este modo el número de 4 dígitos que hace mayor la diferencia posible entre el número BD y el número AC es el 1789, donde $79 - 18 = 61$.

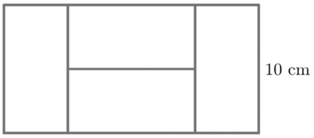
Problema 262. Catalina escribe algunos números entre 1 y 9 en cada cara de un cubo. Entonces, para cada vértice, suma los números de las tres caras que comparten ese vértice (por ejemplo, para el vértice *B*, suma los números de las caras *BCDA*, *BAEF* y *BFGC*). Las cifras calculadas por María para los vértices *C*, *D* y *E* son 14, 16 y 24, respectivamente. ¿Qué número se agregará al vértice *F*?



Solución. Notemos que *C* y *E* no tienen caras compartidas comunes, por lo que 14 y 24 no deben compartir sumandos, además, el número 24 ubicado en el vértice *E* se descompone en tres sumandos de un dígito de manera única, 24 = 9 + 8 + 7. Con los dígitos que quedan podemos formar el número 14 ubicado en el vértice *C* de una única manera 14 = 6 + 5 + 3, y el 16 en *D* de dos maneras 16 = 6 + 3 + 7 o 16 = 5 + 3 + 8.

Como 16 = 6 + 3 + 7, 14 = 6 + 5 + 3, y además, *D* y *C* comparten dos caras, entonces comparten el 6 y el 3, por lo tanto, *ADHE* = 7 y *BCGF* = 5. Si *ADHE* = 7 y *E* = 24 = 9 + 8 + 7, se tiene que 9 y 8 son caras que comparten el vértice *F*. Por lo tanto, *F* = 5 + 8 + 9 = 22.

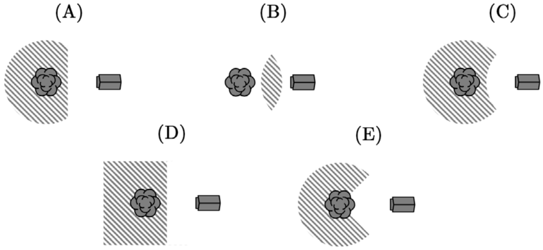
Problema 263. Con 4 rectángulos congruentes se forma un nuevo rectángulo como el que muestra la figura. Si la longitud del lado más corto de este nuevo rectángulo es 10 cm. Calcular el perímetro de dicho rectángulo.



Solución. Observemos que el lado más corto del rectángulo grande es 10, que corresponde, según el dibujo, a dos veces el lado más corto del rectángulo pequeño, por consiguiente el lado mayor del rectángulo grande mide 5+10+ 5 = 20 cm. Finalmente, el perímetro del rectángulo grande es 2·10+2·20 = 60.

Problema 264. Cuando Simón, la ardilla, llega hasta el suelo, nunca va más allá de 5 metros desde el tronco de su árbol. Sin embargo, también se mantiene al menos a 5 metros de la casa del perro. ¿Cuál de las siguientes imágenes muestra con mayor precisión la forma del terreno donde Simón podría ir?

Solución. Como Simón a lo más se aleja 5 metros de los pies de su árbol, este debe estar dentro de un círculo con centro en el tronco del árbol y radio 5 metros, pero como además debe mantenerse al menos a 5 metros de la casa del perro, debe estar fuera de un círculo con centro en la caseta del perro y radio 5 metros, por lo que la imagen que muestra con mayor precisión la forma del terreno donde Simón podría ir es la *C*.



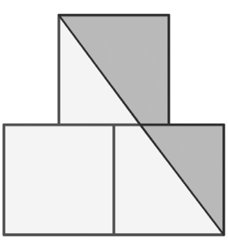
Problema 265. Un ciclista va a 5 metros por segundo. Las ruedas tienen un perímetro de 125 cm. ¿Cuántas vueltas completas hace cada rueda en 5 segundos?

Solución. Que el ciclista avance 5 metros por segundo, es equivalente a decir que avanza 500 centímetros por segundo o bien que avanza de 2500 cm por cada 5 segundos, y como las ruedas de su bicicleta tienen una circunferencia de 125 cm, entonces en 5 segundos la rueda dará $2500 \div 125 = 200$ vueltas.

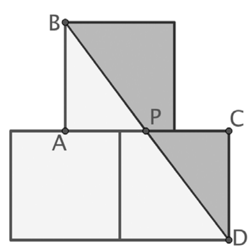
Problema 266. En una clase, no hay dos niños que nacieron el mismo día de la semana y no hay dos niñas que nacieron en el mismo mes. Hoy, un niño nuevo o una niña nueva se unirá a esta clase, y una de estas dos condiciones dejará de ser cierta. A lo más, ¿Cuántos estudiantes (niños y niñas) había inicialmente en la clase?

Solución. A lo más hay 7 niños pues la semana tiene 7 días, a lo más hay 12 niñas, pues el año tiene 12 meses. Si entra un nuevo niño la condición inicial fallará de forma segura si había 7 niños y 12 niñas. Luego, en la clase había $7 + 12 = 19$ estudiantes inicialmente.

Problema 267. En la figura, el centro del cuadrado superior Está encima del borde común de los cuadrados inferiores. Cada cuadrado tiene lados de longitud 1. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



Solución. Observemos que en la figura los triángulos APB y CPD son congruentes, pues los ángulos en A y en C son rectos, además, $AB = CD = 1$, pues son lados de algún cuadrado, y $\angle APB = \angle CPD$, pues, son opuestos por el vértice. De este modo se deduce que ambos triángulos tienen la misma área, luego el área sombreada es igual al área del cuadrado de lado 1, es decir 1 u^2.



Problema 268. Al interior de cada corchete de la siguiente igualdad:

2 [ ] 0 [ ] 1 [ ] 5 [ ] 2 [ ] 0 [ ] 1 [ ] 5 [ ] 2 [ ] 0 [ ] 1 [ ] 5 = 0

se deben anotar signos + o – de modo que la igualdad se cumpla. ¿Cuál es el menor número de signos + que se pueden anotar?

Solución. Notemos que la suma de todos los números en la lista es 24, por lo tanto, debemos tener dos grupos que sumen 12 y −12, y como queremos agregar la menor cantidad de signos +, debemos anteponer un + a dos de los 5 presentes en la lista, de modo que utilizando el 2 del inicio de la lista tendremos un grupo que sume 12, así, el resto de los números deben ser negativos y sumen −12, luego, el menor número de signos + que se pueden anotar es 2.

Problema 269. Durante una tormenta cayeron 15 litros de agua por metro cuadrado cayeron. ¿Cuánto aumentó el nivel del agua en una piscina al aire libre?

Solución. Como 1 litro equivale a 1000 cm^3, 15 litros equivalen a 15000 cm^3. Por otra parte, 1 m^2 equivale $100 \times 100 = 10000$ cm^2. Por lo tanto, la piscina aumentó su nivel $15000 \div 10000 = 1,5$ cm^2.

Problema 270. Un arbusto tiene 10 ramas. Cada rama tiene 5 hojas, o bien, tiene solo 2 hojas y 1 flor. ¿Cuál de los siguientes números podría ser el número total de hojas que tiene el arbusto?

a. 45
b. 39
c. 37
d. 31
e. Ninguna de las anteriores.

Solución. Tenemos las siguientes posibilidades:

- 10 ramas con 5 hojas y 0 ramas con 2 hojas y 1 flor $\Rightarrow 10 \cdot 5 = 50$ hojas.
- 9 ramas con 5 hojas y 1 rama con 2 hojas y 1 flor $\Rightarrow 9 \cdot 5 + 1 \cdot 2 = 47$ hojas.
- 8 ramas con 5 hojas y 2 ramas con 2 hojas y 1 flor $\Rightarrow 8 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 44$ hojas.
- 7 ramas con 5 hojas y 3 ramas con 2 hojas y 1 flor $\Rightarrow 7 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 41$ hojas.
- 6 ramas con 5 hojas y 4 ramas con 2 hojas y 1 flor $\Rightarrow 6 \cdot 5 + 4 \cdot 2 = 38$ hojas.
- 5 ramas con 5 hojas y 5 ramas con 2 hojas y 1 flor $\Rightarrow 5 \cdot 5 + 5 \cdot 2 = 35$ hojas.
- 4 ramas con 5 hojas y 6 ramas con 2 hojas y 1 flor $\Rightarrow 4 \cdot 5 + 6 \cdot 2 = 32$ hojas.
- 3 ramas con 5 hojas y 7 ramas con 2 hojas y 1 flor $\Rightarrow 3 \cdot 5 + 7 \cdot 2 = 29$ hojas.
- 2 ramas con 5 hojas y 8 ramas con 2 hojas y 1 flor $\Rightarrow 2 \cdot 5 + 8 \cdot 2 = 26$ hojas.
- 1 rama con 5 hojas y 9 ramas con 2 hojas y 1 flor $\Rightarrow 1 \cdot 5 + 9 \cdot 2 = 23$ hojas.
- 0 ramas con 5 hojas y 10 ramas con 2 hojas y 1 flor $\Rightarrow 0 \cdot 5 + 10 \cdot 2 = 20$ hojas.

Luego, ninguna de las alternativas nos da un número posible de hojas en el árbol.

De otra manera, observemos que cada vez que descontamos una rama de 5 hojas y agregamos una rama de 2 hojas y una flor estamos descontando 3 hojas del árbol, es decir, el número de hojas que hay en el árbol es $50-3k$, donde k es el número de ramas con 2 hojas y 1 flor que tiene el árbol. Luego, ninguna de las alternativas es de esta forma.

Problema 271. El puntaje promedio de los estudiantes que rindieron un examen de matemática fue de 6. Exactamente, el 60% de los alumnos

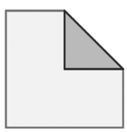
Solución. Sea R puntaje promedio de los estudiantes que reprobaron el examen.

Sabemos que el 60% aprobó, entonces, el 40% reprobó. Luego, como el puntaje promedio total fue 6, tenemos que:

aprobó el examen. El puntaje promedio de los estudiantes que aprobaron el examen fue 8. ¿Cuál es el puntaje promedio de los estudiantes que reprobaron?

$$\begin{aligned} 8 \cdot 0,6 + R \cdot 0,4 &= 6 \\ 4,8 + R \cdot 0,4 &= 6 \\ R \cdot 0,4 &= 1,2 \\ R &= 3 \end{aligned}$$

Problema 272. Una de las esquinas de un cuadrado se pliega a su centro para formar un pentágono irregular. Las áreas del pentágono y del cuadrado son enteros consecutivos. ¿Cuál es el área del cuadrado?

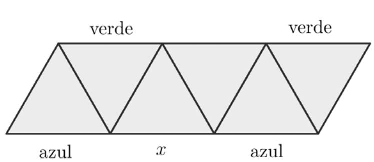


Solución. Notemos que el área que pierde el cuadrado al doblar la esquina para obtener un pentágono irregular es ⅛ del área del cuadrado, pues la esquina del cuadrado es llevada al centro del cuadrado, es decir, el cuadrado puede ser dividido en 8 triángulos congruentes al triángulo formado en la esquina, y como las áreas del pentágono y del cuadrado son números naturales consecutivos, el cuadrado tiene área 8 y el pentágono tiene área 7. Finalmente, el área del cuadrado es 8 u^2.

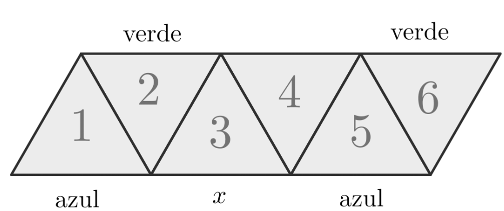
Problema 273. Raquel sumó las longitudes de tres de los lados de un rectángulo y obtuvo 44 cm. También Lidia sumó las longitudes de tres de los lados del mismo rectángulo y obtuvo 40 cm. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo?

Solución. Sean x e y los lados de los rectángulos, las suma de Raquel es $2x+y = 44$ y la suma de Lidia es $x + 2y = 40$, de donde obtenemos que $3x + 3y = 84 \Rightarrow x + y = 28 \Rightarrow 2x + 2y = 56$.

Problema 274. El diagrama muestra una secuencia de triángulos, e indica los colores de algunos segmentos. Cada triángulo debe estar formado por tres colores distintos, rojo, azul y verde. ¿De qué color se debe pintar el segmento x?



Solución. Notemos que necesariamente el lado compartido por el triángulo 1 y 2 es rojo, al igual que el lado compartido por el triángulo 5 y 6. Luego, el lado compartido por el triángulo 2 y 3 es azul, y el lado compartido por el triángulo 4 y 5 es verde. Ahora, el lado no compartido del triangulo 4 puede ser rojo o azul. Si es rojo, el lado compartido por el triángulo 3 y 4 sería azul, pero es imposible puesto que el triángulo 3 ya tiene un lado azul. Por consiguiente, el lado no compartido del triángulo 4 es azul y el lado compartido por el triángulo 3 y 4 es rojo y el lado x es verde.



Problema 275. La profesora preguntó a cinco de sus alumnos, ¿cuántos de los cinco había realizado su tarea? Álvaro dijo que ninguno, Berta dijo que solo una, Camilo dijo exactamente dos, Daniela dijo exactamente tres y Eugenia dijo exactamente cuatro. La profesora sabía que aquellos estudiantes que no habían hecho su tarea no estaban diciendo la verdad, pero los que habían hecho su tarea estaban diciendo la verdad. ¿Cuántos de estos estudiantes habían hecho su tarea?

Solución. Supongamos que 5 estudiantes hicieron la tarea. Como álvaro dijo que 0, entonces miente. Como Berta dijo que 1, entonces miente, como Camilo dijo que 2, entonces miente. Como Daniela dijo que 3, entonces miente. Como Eugenia dijo que 4, entonces miente. Luego, como los que hacen su tarea dicen la verdad, entonces, nadie hizo su tarea, contradicción.

Supongamos que 4 estudiantes hicieron la tarea. Como álvaro dijo que 0, entonces miente. Como Berta dijo que 1, entonces miente, como Camilo dijo que 2, entonces miente. Como Daniela dijo que 3, entonces miente. Como Eugenia dijo que 4, dice la verdad. Luego como los que hacen su tarea dicen la verdad, entonces, solo Eugenia hizo su tarea, contradicción.

Supongamos que 3 estudiantes hicieron la tarea. Como álvaro dijo que 0, entonces miente. Como Berta dijo que 1, entonces miente, como Camilo dijo que 2, entonces miente. Como Daniela dijo que 3, dice la verdad. Como Eugenia dijo que 4, entonces miente. Luego como los que hacen su tarea dicen la verdad, entonces, Daniela hizo su tarea, contradicción.

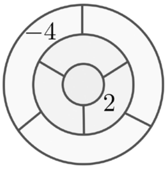
Supongamos que 2 estudiantes hicieron la tarea. Como álvaro dijo que 0, entonces miente. Como Berta dijo que 1, entonces miente, como Camilo dijo que 2, dice la verdad. Como Daniela dijo que 3, entonces miente. Como Eugenia dijo que 4, entonces miente. Luego como los que hacen su tarea dicen la verdad, entonces, Camilo hizo su tarea, contradicción.

Supongamos que 1 estudiante hizo la tarea. Como álvaro dijo que 0, entonces miente. Como Berta dijo que 1, dice la verdad, como Camilo dijo que 2, entonces miente. Como Daniela dijo que 3, entonces miente. Como Eugenia dijo que 4, entonces miente. Luego como los que hacen su tarea dicen la verdad, entonces, Berta hizo su tarea, verdadero.

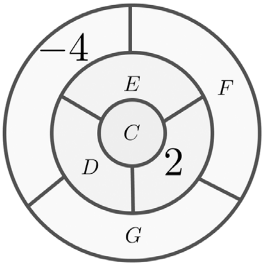
Supongamos que 0 estudiantes hicieron la tarea. Como álvaro dijo que 0, entonces miente. Como Berta dijo que 1, entonces miente, como Camilo dijo que 2, entonces miente. Como Daniela dijo que 3, entonces miente. Como Eugenia dijo que 4, entonces miente. Luego como los que hacen su tarea dicen la verdad, entonces, álvaro hizo su tarea, contradicción.

Luego solo un estudiante hizo su tarea.

Problema 276. Romina quiere escribir un número en cada una de las siete regiones delimitadas en el diagrama. Dos regiones son vecinas si comparten parte de su límite. El número en cada región corresponde a la suma de los números de sus vecinos. Romina ya ha escrito los números en dos de las regiones. ¿Qué número debe que escribir en la región central?



Solución. Observemos que los vecinos de -4 también son vecinos de 2, pero el número 2 tiene un vecino más que es C, luego, tenemos las ecuaciones $E+D+F+G = -4$ y $E+D+F+G+C = 2$ por lo que $-4 + C = 2 \Rightarrow C = 6$. Luego, el número que se debe escribir en la región central es 6.



Problema 277. Cinco enteros positivos (no necesariamente todos distintos) están escritos en cinco cartas. Pedro calcula la suma de los números en cada par de cartas. Obtiene solo tres diferentes totales, 57, 70, y 83. ¿Cuál es el mayor entero en alguna de estas cartas?

Solución. Notemos que con 5 números distintos en las cartas, a, b, c, d, e obtenemos 10 sumas distintas, $a+b, a+c, a+d, a+e, b+c, b+d, b+e, c+d, c+e, d+e$, y Pedro en el problema solo obtiene 3 sumas distintas, por lo tanto, entre los números de las 5 cartas debe haber pares de números repetidos.

Observemos que si los 5 números son de la forma a, a, b, b, b, obtenemos solo 3 sumas distintas $a+a, a+b, b+b$, pero con estas sumas es imposible obtener como totales el 57, 70, y el 83, pues $a+a$ y $b+b$ son pares y Pedro tiene una sola suma par, esto nos indica que solo es posible repetir uno de los números de la lista para obtener solo un resultado par.

Luego, la lista debe ser de la forma a, b, b, b, c, la cual genera las sumas $a + b, a + c, b + b, b + c$, donde, $b + b$ es par, concluyendo que $b + b = 70 \Rightarrow b = 35$. Obteniendo las siguientes sumas: $a + 35, a + c, 35 + 35, 35 + c$.

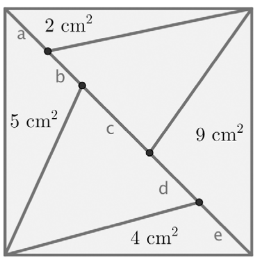
Además, entre las sumas $a+35, a+c, 35+35, 35+c$. deben haber 2 sumas iguales, y como $a \neq b \neq c$ se concluye que $a + c = 70$. Luego, $a + 35 = 57$ y $35 + c = 83$, obteniendo que $a = 22$ y que $c = 48$, coincidiendo que $a + c = b + b = 70$.

Por lo tanto, el mayor entero que aparece en la lista es el 48.

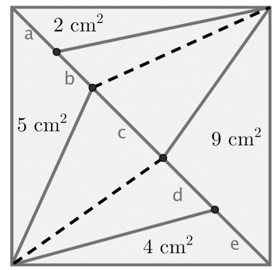
Problema 278. Un cuadrado de área 30 cm^2 está dividido en dos por una diagonal, sobre esta diagonal marcamos 4 puntos

Solución. El área de un triángulo depende de su altura y su base, como todos los triángulos que se forman en la figura tienen la misma altura (la mitad de la diagonal), entonces, el triángulo con mayor área será el triangulo con mayor base.

generando 5 segmentos en la diagonal, a, b, c, d, e. Luego, construimos triángulos, como se muestra en la figura. ¿Qué segmento de la diagonal es el más largo?



Como el triángulo con base a tiene un área de 2 cm^2 y el triángulo con base $a+b$ tiene un área de 5 cm^2, entonces el triángulo con base b tiene un área de 3 cm^2.



Como el triángulo con base e tiene un área de 4 cm^2 y el triángulo con base $d + e$ tiene un área de 9 cm^2 entonces el triángulo con base d tiene un área de 5 cm^2. Por lo tanto, al comparar los triángulos con base a, base b, base c, base d y base e, el triángulo con base d es el triángulo con área mayor, por lo tanto, tiene la mayor base, luego, el segmento d es el mayor.

Problema 279. En un grupo de canguros, los dos canguros más livianos pesan el 25% del peso total del grupo. Los tres canguros más pesados pesan el 60% del peso total. ¿Cuántos canguros están en el grupo?

Solución. Como los dos canguros más livianos pesan el 25% del peso total del grupo, entonces, en promedio pesan el 12,5% del peso total del grupo. Como los tres canguros más pesados pesan el 60% del peso total, entonces, en promedio pesan el 20% del peso total del grupo. Por lo tanto, los canguros que quedan, que no son ni los más pesados ni los más livianos pesan en total el $100 - 25 - 60 = 15\%$ del peso total del grupo. Luego, queda solo un canguro, pues si hubiera 2 o más pesarían en promedio el 7,5% o menos del total del peso del grupo, y serian canguros livianos. Finalmente, son 6 los canguros que están en el grupo.

Problema 280. Camila puede utilizar algunos trozos de alambre de medida 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm y 7 cm para hacer un cubo de alambre con aristas de longitud 1 cm sin solapamientos. ¿Cuál es el menor número de estas piezas que puede usar?

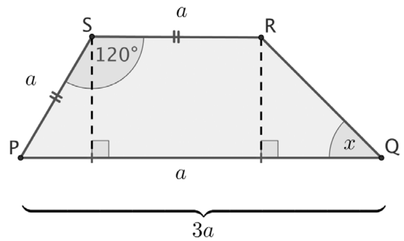
Solución. Como en cada vértice de un cubo concurren 3 aristas, por cada vértice del cubo deben pasar al menos 2 trozos de alambre de modo que no existan solapamientos. Además, cuando un trozo de alambre pasa por un vértice cubriendo 2 artistas, necesariamente la tercera arista debe ser un extremos de alambre, por lo tanto, cada vértice del cubo requiere al menos un extremo de un trozo de alambre.

Como un cubo tiene ocho vértices y cada trozo de cable tiene dos extremos, se tiene que el número mínimo de trozos de alambre es $8 \div 2 = 4$ trozos. Esta solución es posible, por ejemplo, con cables de longitud de 1 cm, 2 cm, 4 cm y 5 cm.

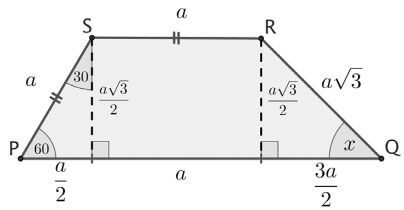
Problema 281. En *PQRS* trapecio, los lados *PQ* y *SR* son paralelos el ángulo $PSR = 120°$

Solución. Sea $RS = SP = $ a, luego, $PQ = 3a$, notemos que al trazar las perpendiculares desde S y desde R hasta la base PQ del trapecio, se proyecta la longitud a de SR sobre la base.

y $RS = SP = \frac{1}{3}PQ$. ¿Cuál es la medida del ángulo PQR?



Por otra parte, al trazar las perpendiculares se forma a la izquierda de la figura un triángulo de ángulos 30º, 60º,90º.

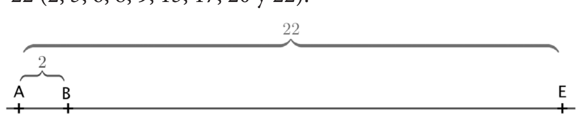


Como $PS = a$, la proyección de PS sobre la base del trapecio (base del triángulo) es igual a $\frac{a}{2}$ y la altura del trapecio (altura del triángulo) es $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Además, como la base del trapecio mide $3a$, se tiene que la proyección QR sobre la base mide $3a - a - \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$, por lo que el triángulo formado a la derecha de la figura tiene base $\frac{3a}{2}$ y altura $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, siendo este semejante al triángulo anterior en razón $1 : \sqrt{3}$, por lo tanto el ángulo $PQR = 30º$.

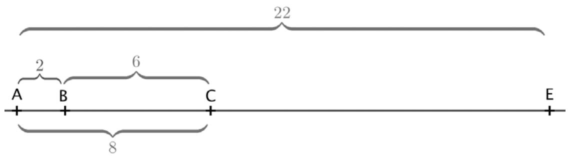
Problema 282. Cinco puntos se encuentran en una línea. Alex encuentra las distancias entre cada posible par de puntos, obteniendo las medidas 2, 5, 6, 8, 9, k, 15, 17, 20 y 22, en ese orden. ¿Cuál es el valor de k?

Solución. Claramente los dos puntos más cercanos deben a estar a distancia 2 y los dos puntos más lejanos deben estar a distancia 22, por lo tanto, podemos ubicar los primeros 3 puntos de la manera que muestra la figura, donde $AB = 2$, $BE = 20$, $AE = 22$ (~~2~~, 5, 6, 8, 9, 15, 17, ~~20~~ y ~~22~~).

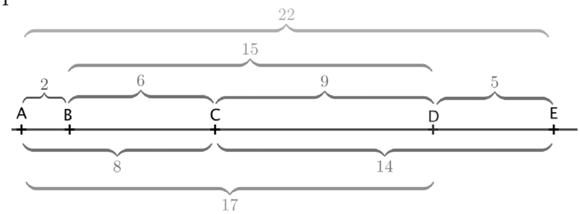


Ahora como dejamos los A y E ubicados en los extremos, los puntos restantes debemos ubicarlos entre A y E, por lo que las 4 medidas (AB,BC,CD,DE) deben sumar 22, y de la lista de medidas que se tienen 2, 5, 6, 9 suman 22.

Como tenemos que el primer segmento mide 2, el segundo segmento podría medir 5 lo que es imposible pues $2 + 5 = 7$ y 7 no es una medida posible, luego, el segundo segmento debe medir 6, pues $2 + 6 = 8$ y 8 si es una medida posible (~~2~~, 5, ~~6~~, ~~8~~, 9, 15, 17, ~~20~~ y ~~22~~).



Como hemos ocupado los números 2, 6 y 8, agreguemos ahora la medida $CD = 9$, obteniendo con esto los segmentos $BD = 15$, $AD = 17$ y $DE = 5$ (~~2~~, ~~5~~, ~~6~~, ~~8~~, ~~9~~, ~~15~~, ~~17~~, ~~20~~ y ~~22~~). Finalmente, solo nos falta ubicar el segmento CE, el cual debe medir 14, por lo que $k = 14$.



Problema 283. Ayer anoté el número de teléfono de Eduardo. El número de teléfono en mi nota tiene seis dígitos, pero recuerdo que Eduardo, dijo que el número tenía siete dígitos. ¿Hasta cuántos números diferentes de teléfono puedo llegar a marcar hasta lograr comunicarme con Eduardo? (Tenga en cuenta que un número de teléfono puede comenzar con cualquier dígito, incluyendo 0.)

Solución. Supongamos que el número telefónico que anoté es el 924561, entonces, el problema se trata de introducir todos los números posibles entre los dígitos del número telefónico de modo que se generen números telefónicos distintos.

En la primera casilla podemos ubicar cualquiera de los números del 0 al 9, es decir, tenemos 10 maneras de elegir un número para la primera casilla.

$\boxed{}$ 924561

$\boxed{0}$ 924561	$\boxed{5}$ 924561
$\boxed{1}$ 924561	$\boxed{6}$ 924561
$\boxed{2}$ 924561	$\boxed{7}$ 924561
$\boxed{3}$ 924561	$\boxed{8}$ 924561
$\boxed{4}$ 924561	$\boxed{9}$ 924561

Analicemos ahora de cuantas maneras se puede ingresar un dígito en el segundo casillero.

9 $\boxed{0}$ 24561	9 $\boxed{5}$ 24561
9 $\boxed{1}$ 24561	9 $\boxed{6}$ 24561
9 $\boxed{2}$ 24561	9 $\boxed{7}$ 24561
9 $\boxed{3}$ 24561	9 $\boxed{8}$ 24561
9 $\boxed{4}$ 24561	9 $\boxed{9}$ 24561

Pero esta última combinación de números 9 $\boxed{9}$ 24561 ya la habíamos encontrado en un principio $\boxed{9}$ 924561, pues en el par 9 9 no importa si el primer o el segundo 9 es el faltante. Luego, para llenar la segunda casilla tenemos 9 posibilidades.

Análogamente, podemos ver que para las 6 casillas restantes tenemos 9 posibilidades por cada una. Finalmente, se pueden hacer hasta $10 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 64$ combinaciones para lograr comunicarme con Eduardo.

Problema 284. María divide 2015 por 1, por 2, por 3 y así sucesivamente, hasta dividirlo por 1000. Ella escribe abajo el resto para cada división. ¿Cuál es el más grande de estos restos?

Solución. Se trata de descomponer el número $2015 = nk + r$, de modo que r sea lo más grande posible

- $2015 = 1 \cdot 1008+1007$, es decir, $2015 \div 1008 = 1$ con resto 1007, pero el 2015 solo se puede dividir hasta por 1000.
- $2015 = 2 \cdot 672 + 671$, es decir, $2015 \div 672 = 2$ con resto 671, luego este es el resto más grande posible.

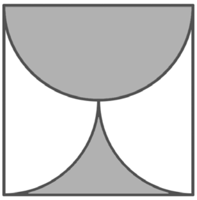
Observemos que en cualquier otro caso el resto es menor.

- $2015 = 3 \cdot 504 + 503$
- …

Problema 285. Una madre lavaba la ropa y colgaba camisetas en línea en un cordel para tender ropa. Luego le pidió a sus hijos que colgaran un solo calcetín entre dos camisetas. Ahora hay 29 prendas de ropa en el cordel. ¿Cuántas camisetas hay?

Solución. Como los hijos colgaron un calcetín entre dos camisetas, entonces en el cordel la primera y la última prenda deben ser camiseta, y como en total hay 29 prendas, entonces necesariamente hay 15 camisetas y 14 calcetines.

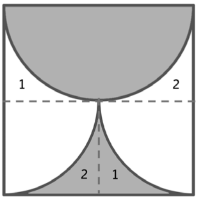
Problema 286. La parte sombreada del cuadrado de lado a Está delimitada por un semicírculo y dos arcos congruentes de círculo. Calcular el área sombreada.



Solución. Como el lado del cuadrado mide a, el radio del semicírculo mide $\frac{a}{2}$, luego su área es $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (\frac{a}{2})^2$. Además el área inferior de la figura corresponde a la mitad del área del cuadrado de lado a menos el área de un semicírculo de radio $\frac{a}{2}$, esto es, $\frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (\frac{a}{2})^2$, luego, la suma de dichas áreas es:

$$\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

Además, podemos ver que cuando la figura es dividida por la mitad, se generan areas congruentes como se muestra en la figura, por lo que claramente el área achurada es la mitad del cuadrado, es decir, $\frac{a^2}{2}$.



Problema 287. Tres hermanas, Ana, Berta y Cindy compraron una bolsa de 30 galletas. Ana aportó con \$80, Berta con \$50 y Cindy con \$20 y se repartieron las galletas en partes iguales, 10 para cada una. ¿Cuántas galletas más debería haber recibido Ana si se hubiera repartido las galletas proporcionalmente al dinero que cada una aportó?

Solución. Notemos que la bolsa de galletas cuesta $80 + 50 + 20 = 150$ pesos, por lo que cada galleta costaría $150 \div 30 = 5$ pesos, por lo tanto, como Ana aportó con 80 pesos debería recibir $80 \div 5 = 16$ galletas, como Berta aportó con 50 pesos debería recibir $50 \div 5 = 10$ galletas y como Cindy aportó con 20 pesos debería recibir $20 \div 5 = 4$ galletas.

Como inicialmente había recibido 10 galletas, entonces, si se hubiera repartido las galletas proporcionalmente al dinero que cada una aportó, Ana debería haber recibido 6 galletas más.

Problema 288. ¿Cuál es el último dígito del número $2015^2 + 2015^0 + 2015^1 + 2015^5$?

Solución. Observemos que 2015^2, 2015^1 y 2015^5 terminan en 5 y que $2015^0 = 1$, por lo que el último dígito de la suma será el último dígito de $5+5+5+1 = 16$, es decir 6.

Problema 289. Hay 33 niños en una clase. Sus asignaturas favoritas son informática o educación física. Tres de los niños prefieren ambas asignaturas. El número de niños que prefieren solo la asignatura de informática es el doble de los que prefieren solo educación física. ¿Cuántos niños prefieren informática?

Solución. Si hay 33 estudiantes, y 3 de ellos prefieren ambas asignaturas, entonces los otros 30 estudiantes prefieren solo una de las dos asignaturas. Como el número de niños que prefieren solo la asignatura de informática es el doble de los que prefieren solo educación física, es claro que 10 prefieres educación física y 20 niños (el doble) prefieren informática, si a esto agregamos los 3 estudiantes que prefieren informática junto a educación física, nos da un total de 23 niños que prefieren informática.

Problema 290. El Sr. Vela compró 100 velas. El enciende una vela cada día hasta que se quema, el Sr. Vela siempre hace una nueva vela con la cera de siete velas quemadas. ¿Durante cuántos días el Sr. Vela encenderá una vela completa (entera)?

Solución. Claramente las 100 velas alcanzan para 100 días, sobrando 100 porciones de cera. Como $100 = 7 \cdot 14+2$, se tiene que con esas 100 porciones de cera puede armar 14 nuevas velas quedando 2 porciones sin utilizar. Luego, esas 14 velas alcanzan para 14 días, sobrando 14 porciones de cera. Como $14 = 7 \cdot 2$, se tiene que con esas 14 porciones de cera puede armar 2 nuevas velas. Finalmente las velas durarán $100 + 14 + 2 = 116$ días.

Problema 291. Cada habitante del planeta Alero tiene al menos dos orejas. Tres habitantes nombrados Imi, Dimi y Trimi se reunieron en un cráter. Imi dijo: “Puedo ver 8 orejas”. Dimi: “Veo 7 orejas”. Trimi: “Puedo ver solo 5 orejas”. Si ninguno de ellos podía ver a sus propias orejas. ¿Cuántas orejas tiene Trimi?

Solución. Sea I el número de orejas de Imi, D el número de orejas de Dimi y T el número de orejas de Trimi, como Imi ve 8 orejas, $T + D = 8$, como Dimi ve 7 orejas, $I + T = 7$ y como Trimi ve 5 orejas, $I + D = 5$. Luego, $2I + 2D + 2T = 20$ por lo que en total las orejas de los habitantes suman 10. Como Imi ve 8 orejas, el tiene 2, como Dimi ve 7 orejas el tiene 3 y como Trimi ve 5 orejas, entonces el tiene 5 orejas.

Problema 292. Un recipiente con la forma de un prisma rectangular y cuya base es un cuadrado de lado 10 cm, se llena con agua hasta una altura de h cm. Un cubo sólido de 2 cm de lado se pone en el recipiente. ¿Cuál es el mínimo valor de h cuando el cubo es completamente sumergido en el agua?

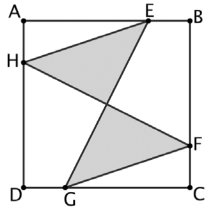
Solución. Si h es la altura del agua contenida en el prisma rectangular, entonces, el volumen de agua contenida es $10 \cdot 10 \cdot h = 100h$ cm^3. Como el cubo que introducimos es de lado 2 su volumen es 23 = 8 cm^3, por lo tanto, el volumen ocupado por el agua y el cubo en el recipiente es:

$$100\text{h} + 8 = 100\left(h + \frac{8}{100}\right)$$

Como queremos encontrar el mínimo valor de h cuando el cubo está completamente sumergido en el agua, necesitamos que el cubo llegue al fondo del recipiente y la altura del cubo coincida con la altura del agua, es decir que:

$$h + \frac{8}{100} = 2 \Rightarrow h = 2 - \frac{8}{100} \Rightarrow h = 1{,}92 \text{ cm.}$$

Problema 293. El cuadrado *ABCD* tiene área 80. Los puntos *E*, *F*, *G* y *H* están en los lados del cuadrado de modo que *AE* = *BF* = *CG* = *DH*. Si *AE* = 3*EB*, cuál es el área de la figura sombreada?



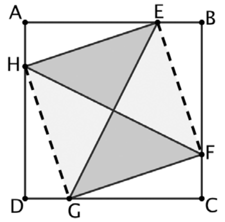
Solución. Notemos que al trazar los segmentos *EF* y *GH*, se genera el cuadrado *EFGH* cuya área es el doble del área sombreada. Además, el área de cada uno de los triángulos exteriores a este cuadrado es:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{80}}{4} \cdot \frac{3\sqrt{80}}{4} = \frac{3 \cdot 80}{32} = \frac{15}{2}$$

Luego, el área del cuadrado pequeño es

$$80 - 4 \cdot \frac{15}{2} = 80 - 30 = 50\text{u}^2$$

Finalmente, el área sombreada es de 25u2

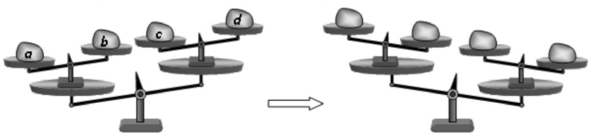


Problema 294. El producto de las edades (en números enteros) de un padre y un hijo es de 2015. ¿Cuál es la diferencia de sus edades?

Solución. Notemos que $2015 = 5 \cdot 403 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, donde este producto es la descomposición prima de 2015, por lo tanto las posibles edades son $5 \cdot 13 = 65$ y 31, $5 \cdot 31 = 155$ y 13, $13 \cdot 31 = 403$ y 5. Luego, es imposible que alguno de ellos tenga 155 o 403 años, por lo tanto, las edades del padre y el hijo son 65 y 31, donde la diferencia $65 - 31 = 34$

Problema 295. Cuatro pesos a, b, c, d se colocan en una balanza (ver la figura). Cuando dos de las cargas fueron intercambiadas, la balanza cambia su posición como se muestra en la figura. ¿Qué cargas fueron intercambiadas?

Solución. La primera balanza muestra que $a > b$, $c > d$ y que $a + b > c + d$, como debemos hacer solo un intercambio para obtener la segunda balanza, entonces, es claro que el peso más pesado a debe intercambiarse con el peso más liviano d.



Problema 296. Si las dos raíces de la ecuación $x^2 - 85x + c = 0$ son números primos. ¿Cuál es el valor de la suma de los dígitos de c?

Solución. Sabemos que el producto de dos binomios de la forma $(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + a \cdot b$ con a y b positivos, en este caso $a + b = 85$ y $a \cdot b = c$. Además, si dos primos suman 85, entonces uno es par y otro es impar, pero el único primo par es 2, por lo que el otro primo es 83. Por lo tanto, $c = 2 \cdot 83 = 166$ y la suma de sus dígitos es $1 + 6 + 6 = 13$.

Problema 297. ¿Cuántos números enteros positivos de tres dígitos existen de modo que cualquiera de dos dígitos adyacentes difieran en 3 unidades?

Solución. Si estos números enteros tienen dígitos distintos, podemos encontrar los números 147, 258 y 369, si invertimos sus dígitos encontramos otros tres números que también cumplen la condición 741, 852 y 963.

Si estos números enteros tienen dígitos repetidos, podemos encontrar los números 141 y 414, 252 y 525, 363 y 636, 474 y 747, 585 y 858, 696 y 969.

Por último nos falta contar los números que contienen el 0, estos son 303 y 630.

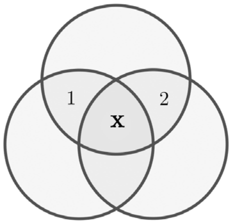
Finalmente, 20 números cumplen la condición.

Problema 298. ¿Cuál de los siguientes es un contraejemplo de la proposición "Si n es primo, entonces entre los números $n-2$ y $n+2$ solo uno es primo"?

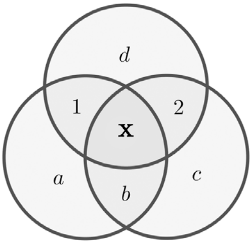
a. $n = 11$ **d.** $n = 29$
b. $n = 19$ **e.** $n = 37$
c. $n = 21$

Solución. Si $n = 11$, $n - 2 = 9$ y $n + 2 = 13$, se cumple la proposición, pues solo uno de ellos (13) es primo. Si $n = 19$, $n-2 = 17$ y $n+2 = 21$, se cumple la proposición, pues solo uno de ellos (17) es primo. El $n = 21$ no sirve como contra ejemplo pues no es primo. Si $n = 29$, $n - 2 = 27$ y $n + 2 = 31$, se cumple la proposición, pues solo uno de ellos (31) es primo. Si $n = 37$ se contradice la proposición, pues $n-2 = 35$ y $n+2 = 39$, y ninguno de ellos es primo.

Problema 299. La figura muestra siete regiones delimitadas por tres círculos. En cada región se escribe un número. Se sabe que el número en cualquier región es igual a la suma de los números de todas sus regiones vecinas (dos regiones son vecinas si sus fronteras tienen más de un punto común). Dos de los números son conocidos (ver la figura). ¿Qué número Está escrito en la región central?



Solución.:



De acuerdo al enunciado se tiene que:

(1) $x = b + 1 + 2$
(2) $1 = a + d + x$
(3) $2 = c + d + x$
(4) $b = a + c + x$
(5) $a = b + 1$
(6) $d = 3$
(7) $c = b + 2$

De la ecuación (6) se tiene que (2) $1 = a + 3 + x \Rightarrow a + x = -2$ y (3) $2 = c + 3 + x \Rightarrow c + x = -1$. Sumando las ecuaciones (2) y (3) se tiene que $a + c + 2x = -3$. Como en la ecuación (4) $a + c = b - x$, se tiene que $b - x + 2x = -3 \Rightarrow b + x = -3$. Como en la ecuación (1) $b - x = -3$, se tiene que $b + x = b - x \Rightarrow x = 0$.

Problema 300. Juan tiene 3 diccionarios diferentes y dos novelas diferentes en un estante. ¿Cuántas maneras hay para organizar los diccionarios y las novelas si se quiere mantener los diccionarios juntos y las novelas juntas?

Solución. Notemos que por el principio de la multiplicación Juan tiene $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ maneras de ordenar solo los diccionarios, y $2 \cdot 1 = 2$ maneras de ordenar solo las novelas, por lo tanto, cuando Juan junta diccionarios con novelas, cada ordenación de diccionarios se duplica, por ejemplo $D_1D_2D_3N_1N_2$, genera la ordenación $D_1D_2D_3N_2N_1$.

De este modo si ubicamos primero los diccionarios tenemos $6 \cdot 2 = 12$ ordenaciones, del mismo modo si ubicamos primeros las novelas tenemos $2 \cdot 6 = 12$ ordenaciones, luego Juan puede hacer 24 ordenaciones manteniendo los diccionarios juntos y las novelas juntas.

Problema 301. ¿Cuántos números de 2 dígitos se pueden escribir como la suma de exactamente seis diferentes potencias de 2 incluyendo 2^0?

Solución. Como queremos escribir un número de dos dígitos como la suma de seis diferentes potencias de 2, necesariamente estas potencias deben tener 2 o menos dígitos, por lo tanto, nos sirven las potencias $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, donde las únicas sumas que suman menos que 100 son $1+2+4+8+16+32 = 64$ y $1+2+4+8+16+64 = 95$, luego, se pueden escribir solo estos 2 números.

Problema 302. Andrea nació en 1997, su hermana menor Carla, en el año 2001. La diferencia de edad de las dos hermanas, en cualquier caso, es:

a. menos de 4 años
b. al menos 4 años
c. exactamente 4 años
d. más de 4 años
e. no menos de 3 años

Solución. Andrea y Carla tendrían una diferencia de edades máxima si Andrea hubiera nacido el 1 de enero de 1997 y Carla el 31 de diciembre de 2001, es decir, 4 años y 364 días.

Andrea y Carla tendría una diferencia de edades mínima si Andrea hubiera nacido el 31 de diciembre de 1997 y Carla el 1 de enero de 2001, es decir, 3 años y 1 día.

Luego, la diferencia de sus edades será no menos de 3 años y no más de 5 años. Por lo tanto, siempre se cumple *E*.

Problema 303. Reduzca la expresión:

$(a - b)^5 + (b - a)^5$

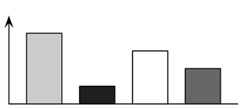
Solución. Como $(a - b)^5$ es una potencia impar tenemos que $(a - b)^5$ y $(b - a)^5$, solo difieren en el signo, es decir:

$$(b - a)5 = (-a + b)^5 = (-(a - b))^5 = -(a - b)5$$

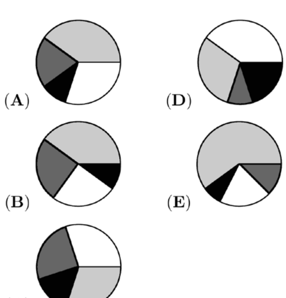
De este modo:

$$(a - b)^5 + (b - a)^5 = (a - b)^5 - (a - b)^5 = 0.$$

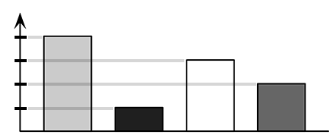
Problema 304. Daniela dibujó un gráfico de barras que representa la cantidad de las cuatro especies de árboles registradas durante una excursión de biología.



Juan piensa que un gráfico circular podría representar mejor las proporciones de las diferentes especies de ´arboles. ¿Cuál es el gráfico circular más pertinente?



Solución.



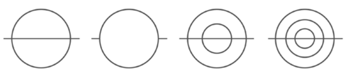
Notemos que en el dibujo los 4 sectores están aproximadamente en la razón 1 : 2 : 3 : 4, por lo que la torta debemos dividirla en 1 + 2 + 3 + 4 = 10 partes.

De este modo tenemos, 1 parte para el negro, 2 partes para el gris oscuro, 3 partes para el blanco y 4 partes para el gris claro, por lo que el gráfico que más se acerca es el (A).

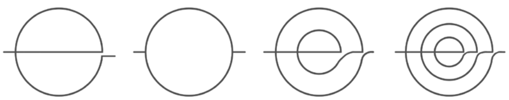
Problema 305. Qué resultado obtenemos al dividir por 31 la suma de los 31 enteros del 2001 hasta el 2031.

Solución. Notemos que debemos calcular la media aritmética de los números 2001, 2002, ..., 2031, y la media aritmética de estos números enteros consecutivos será el número central, que en este caso es el 2016.

Problema 306. ¿Cuántas de las siguientes figuras se pueden trazar con una línea continua sin dibujar un segmento dos veces?



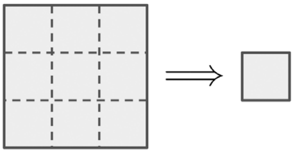
Solución. Como se trata de trazar las figuras con una linea continua sin pasar dos veces por el mismo segmento, podemos hacerlo del siguiente modo:



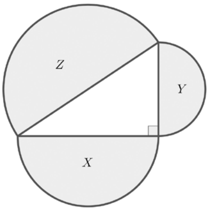
Por lo tanto, en 3 de estas formas se puede hacer dicho trazado.

Problema 307. Un pedazo cuadrado de papel se dobla a lo largo de las líneas de puntos, una tras otra, en cualquier orden o dirección. Desde la pieza resultante se corta una esquina. Ahora el papel es desplegado. ¿Cuántos orificios hay en el papel?

Solución. Observemos que al doblar el papel, siempre los ocho cuadrados pequeños del borde quedan sobre el cuadrado central, por lo que al cortal una esquina del papel plegado se cortará solo una esquina del cuadrado central, generando solamente un orificio.



Problema 308. Tres semicírculos tienen diámetros que son los lados de un triángulo rectángulo. Sus áreas son X cm^2, Y cm^2 y Z cm^2. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?



a. $X + Y < Z$
b. $\sqrt{X} + \sqrt{Y} = \sqrt{Z}$
c. $X + Y = Z$
d. $X^2 + Y^2 = Z^2$
e. $X^2 + Y^2 = Z$

Solución. Sean a y b los catetos del triángulo rectángulo y c la hipotenusa, por el teorema de Pitágoras se tiene que $a^2 + b^2 = c^2$, si multiplicamos a ambos lados de esta igualdad por $\frac{\pi}{8}$, obtenemos:

$$\frac{a^2\pi}{2} + \frac{b^2\pi}{2} = \frac{c^2\pi}{2}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^2\pi = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{c}{2}\right)^2\pi$$

$$X + Y = Z$$

Donde, $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ son radios de las semicircunferencias.

Problema 309. ¿Cuál de las siguientes es la lista completa del número de ángulos agudos que un cuadrilátero convexo puede tener?

a. 0, 1, 2
b. 0, 1, 2, 3
c. 0, 1, 2, 3, 4
d. 0, 1, 3
e. 1, 2, 3

Solución. La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero convexo es 360º. Si los cuatro ángulos interiores del cuadrilátero son de 90º, el cuadrilátero no tiene ángulos agudos. Si tres de los ángulos interiores del cuadrilátero son mayores o iguales a 90º, el cuadrilátero tiene un ángulo agudo. Si dos de los ángulos interiores del cuadrilátero son mayores o iguales a 90º, el cuadril átero puede tener dos ángulos agudos. Si uno de los ángulos interiores del cuadrilátero es mayor a 90º, el cuadrilátero puede tener tres ángulos agudos.

Además, un cuadrilátero convexo no puede tener 4 ángulos agudos, de ser así, la suma de sus ángulos interiores sería menor de 360º.

Problema 310. Calcular el valor de:

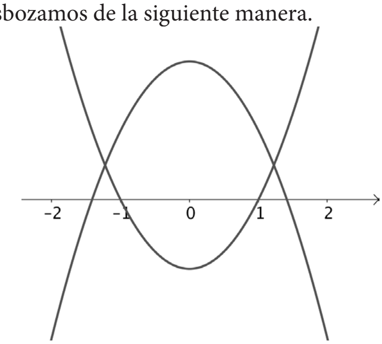
$$\sqrt{(2015+2015)+(2015-2015)+(2015\cdot 2015)+(2015\div 2015)}$$

Solución.

$$\begin{aligned}\sqrt{(2\cdot 2015)+(0)+(20152)+(1)} &= \sqrt{(20152+2\cdot 2015+1}\\ &= \sqrt{(2015+1)^2}\\ &= \sqrt{(2016)^2}\\ &= 2016\end{aligned}$$

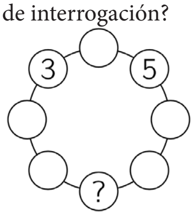
Problema 311. Determine en cuantas regiones queda dividido el plano cartesiano al trazar el eje x y las gráficas de las funciones $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = x^2 - 1$.

Solución. Debemos graficar estas curvas para poder contar las regiones, la curva $f(x) = 2-x^2$, es una parábola que se abre hacia abajo y corta al eje x en $\pm\sqrt{2}$, la curva $g(x) = x^2 - 1$, es una parábola que se abre hacia arriba y corta al eje x en ± 1, luego la gráfica la esbozamos de la siguiente manera.

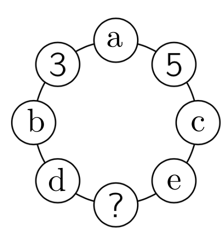


De este modo el plano cartesiano se divide en 10 regiones.

Problema 312. Elsa quiere escribir un número en cada círculo de la imagen de tal manera que cada número es la suma de sus dos vecinos. ¿Qué número debe escribir Elsa en el círculo con el signo de interrogación?



Solución. Notemos que $a = 3 + 5 = 8$, luego, $8 + b = 3 \Rightarrow b = -5$ y $8 + c = 5 \Rightarrow c = -3$. Además, $3 + d = -5 \Rightarrow d = -8$ y $5 + e = -3 \Rightarrow e = -8$. De este modo se tiene que $?+b = -8$ y que $?+c = -8$, pero como b y c son distintos, concluimos que en este diagrama no se cumple la condición de que cada número es la suma de sus dos vecinos.



Problema 313. Dados cinco números enteros positivos distintos a, b, c, d, e, sabemos que $c\div e = b$, $a+b = d$ y $e-d = a$. ¿Cuál de los números a, b, c, d, e es el más grande?

Solución. Como $c \div e = b \Rightarrow c = b \cdot e$, además, como $e - d = a \Rightarrow e = a + d$, se tiene que $c = b(a + d)$, luego c es el número mayor.

Problema 314. La media geométrica de un conjunto de *n* números positivos se define como la raíz n-ésima del producto de esos números. La media geométrica de un conjunto de tres números es 3 y la media geométrica de otro conjunto de tres números es 12. ¿Cuál es la media geométrica del conjunto combinado de seis números?

Solución. El enunciado nos indica que

$$\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c} = 3 \text{ y } \sqrt[3]{d \cdot e \cdot f} = 12.$$

Como queremos calcular $\sqrt[6]{a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f}$, multiplicamos ambas igualdades, luego:

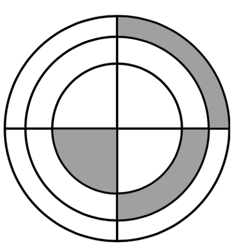
$$\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c} \cdot \sqrt[3]{d \cdot e \cdot f} = 3 \cdot 12$$
$$\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f} = 36.$$

Aplicando raiz cuadrada a ambos lados de la igualdad, obtemos lo pedido:

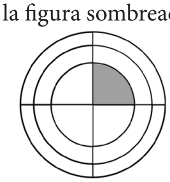
$$\sqrt{\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f}} = \sqrt{36}$$
$$\sqrt[6]{a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f} = 6.$$

Finalmente, 6 es la media geométrica del conjunto combinado de seis números.

Problema 315. En la figura que se muestra hay tres círculos concéntricos y dos diámetros perpendiculares. Si las tres figuras sombreadas tienen igual área y el radio del círculo pequeño es uno, ¿Cuál es el producto de los tres radios?

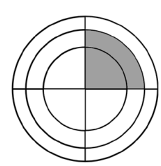


Solución. Como el círculo pequeño tiene radio $r_1 = 1$ su área es π, entonces el área de la figura sombreada es $\frac{\pi}{4}$.



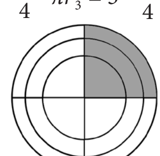
Como todas las áreas sombreadas son iguales, el área de las dos partes que se muestran en esta figura es $2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, por lo tanto el radio del círculo mediano es $r_2 = \sqrt{2}$, pues:

$$\frac{1}{4} \cdot \pi r_2^2 = \frac{\pi}{2}$$



Como todas las áreas sombreadas son iguales, el área de las tres partes que se muestran en esta figura es $3\frac{\pi}{4}$, por lo tanto el radio del círculo grande es $r_3 = \sqrt{3}$, pues:

$$\frac{1}{4} \cdot \pi r_3^2 = 3 \cdot \frac{\pi}{4}$$



Finalmente el producto de los tres radios es $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$

Problema 316. Un concesionario de automóviles compró dos autos. Vendió el primero obteniendo una ganancia del 40% y el segundo obteniendo una ganancia del 60%. La ganancia obtenida por los dos coches fue del 54%. ¿Cuál es la razón de los precios pagados por el primer y el segundo auto?

Solución. Sea x el precio de compra del primer automóvil e y el precio de compra del segundo automóvil, entonces:

$$\begin{aligned} 1{,}4x + 1{,}6y &= 1{,}54(x + y) \\ 1{,}4x + 1{,}6y &= 1{,}54x + 1{,}54y \\ 0{,}06y &= 0{,}14x \\ \frac{x}{y} &= \frac{0{,}06}{0{,}14} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

Problema 317. Vivi tiene un dado con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 en sus caras. Tere tiene un dado especial con los números 2, 2, 2, 5, 5, 5 en sus caras. Cuando Vivi y Tere lanzan los dados el que tiene el número más grande gana. Si los dos números son iguales es un empate. ¿Cuál es la probabilidad de que Tere gane?

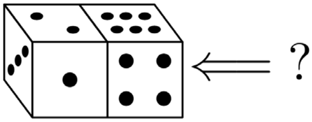
Solución. Notemos si Vivi lanza su dado y obtiene un 1, Tere tiene 6 maneras de ganarle. Si Vivi obtiene un 2, Tere tiene 3 maneras de ganarle. Si Vivi obtiene un 3, Tere tiene 3 maneras de ganarle. Si Vivi obtiene un 4, Tere tiene 3 maneras de ganarle. Si Vivi obtiene un 5 o un 6, Tere no puede ganarle.

De este modo existen $6 + 3 + 3 + 3 = 15$ casos favorables donde Tere gana, como en total hay $6 \cdot 6 = 36$ casos posibles, la probabilidad de que Tere gane es $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

Problema 318. Hay 2015 bolitas en un cajón. Las bolitas son numeradas del 1 al 2015. Se suman los dígitos de los números escritos en cada bolita. Las bolitas en que esta suma sea la misma se pintan del mismo color y bolitas con sumas diferentes, tienen diferentes colores. ¿Cuántos colores diferentes de bolitas hay en el cajón?

Solución. Notemos que 1999 es el número entre 1 y 2015, en el que al sumar sus dígitos se obtiene el mayor resultado 1+9+9+9 = 28. Resulta evidente que para el antecesor de 1999 (1998) la suma de los dígitos será 1+9+9+8 = 27, y para 1997 la suma será 1+9+9+7 = 26, y así sucesivamente, pudiendo obtener como resultados todos los números del 1 al 28. Por lo tanto, hay bolitas de 28 colores distintos en el cajón.

Problema 319. Para los dados estándar la suma de los números en las caras opuestas es 7. Hay dos dados idénticos como se muestran en la figura. ¿Qué número puede estar en el lado no visible?



Solución. Como la suma de los números en las caras opuestas es 7, atrás de 4 está el número 3 y abajo de 6 esta el número 1, entonces en la cara indicada con la flecha está el 2 o el 5. Pero 2 no puede ser, pues si pusiéramos el dado izquierdo en la posición del dado derecho, en lugar de 6 arriba veríamos el 1, luego el número que indica la flecha es 5.

Problema 320. La siguiente es la tabla de multiplicar de los números del 1 al 10. ¿Cuál es la suma de los 100 productos presentes en la tabla?

$\times$	1	2	3	…	10
1	1	2	3	…	10
2	2	4	6	…	20
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
10	10	20	30	…	100

Solución. Notemos que la primera columna suma $1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = 55$, la segunda columna suma $2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 2 \cdot 10 = 2(1+ 2 + 3 +\ldots + 10) = 2 \cdot 55$, de este modo la siguiente columna sumara $3 \cdot 55$, hasta llegar a la última columna que sumará $10 \cdot 55$.

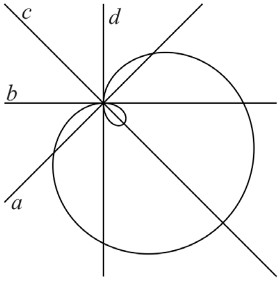
Por lo tanto, la suma de los 100 productos presentes en la tabla completa es:

$$55+2\cdot 55+3\cdot 55+\ldots+10\cdot 55=55\cdot(1+2+3+\ldots+10)=55\cdot 55=3025$$

Problema 321. La curva en la figura está descrita por la ecuación:

$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 2(x^2 + y^2)$$

¿Cuál de las líneas a, b, c, d representa el eje y?



Solución. Si hacemos $x = 0$ veremos los cortes de la curva en el eje y:

$$\begin{aligned} (y^2)^2 &= 2(y^2) \\ y^4 - 2y^2 &= 0 \\ y^2(y^2 - 2) &= 0 \end{aligned}$$

De este modo $y^2 = 0 \Rightarrow y_1 = 0, y_2 = 0$ e $y^2 = 2 \Rightarrow y_3 = \sqrt{2}, y_4 = -\sqrt{2}$. Por lo tanto , la curva corta al eje y en $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ y es tangente en $y = 0$. Luego, la recta a corresponde al eje y.

Problema 322. Al leer las siguientes cinco declaraciones de izquierda a derecha. ¿Cuál es la primera declaración verdadera?

a. (c) es verdadero.
b. (a) es verdadera.
c. (e) es falsa.
d. (b) es falsa.
e. $1 + 1 = 2$

Solución.

- (a) dice que (c) es verdadero y (c) dice que (e) es falsa, pero (e) no es falsa pues $1 + 1 = 2$. Luego, (a) es falsa.
- (b) dice que (a) es verdadera, pero acabamos de demostrar en el punto anterior que (a) es falsa. Luego, (b) es falsa.
- (c) dice que (e) es falsa, pero como $1+1 = 2$ (e) es verdadera. Luego, (c) es falsa.
- (d) dice que (b) es falsa, lo que en el punto 2 está demostrado. Luego, (d) es la primera declaración verdadera.

Problema 323. ¿Cuántos polígonos regulares existen tal que sus ángulos (en grados) son números enteros?

Solución. Sabemos que la medida de un ángulo interior de un polígono regular de n lados es:

$$\frac{180(n-2)}{n} = \frac{180n-360}{n} = \frac{180n}{n} - \frac{360}{n} = 180 - \frac{360}{n}$$

Por lo tanto, debemos determinar los valores de n para los cuales $\frac{360}{n}$ es entero, es decir debemos determinar la cantidad de divisores de 360, para ello obtenemos la descomposición prima de $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, vemos que cualquier combinación de productos entre estos factores será un divisor de 360, por ejemplo 2 divide a 360, $1 \cdot 3$ divide a 360, $2 \cdot 3$ divide a 360, $3 \cdot 5$ divide a 360, $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ divide a 360, etc. Entonces debemos encontrar cuántas combinaciones son formadas con dichos factores.

- 2^3 aporta 4 factores, 2^0, 2^1, 2^2 y 2^3 (3 + 1 factores, donde 3 es el exponente de 2).
- 3^2 aporta 3 factores, 3^0, 3^1 y 3^2 (2+1 factores, donde 2 es el exponente de 3).
- 5^1 aporta 2 factores, 5^0 y 5^1 (1 + 1 factores, donde 1 es el exponente de 5).

Por lo tanto, todas las combinaciones posibles entre estos factores son $(3 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ combinaciones, es decir, 360 tiene 24 divisores.

Pero como n es el número de lados del polígono buscado, $n \neq 1$ y $n \neq 2$, luego existen 22 polígonos regulares donde sus ángulos (en grados) son números enteros.

Existe un resultado que relaciona el teorema de la descomposición prima de un número compuesto con su número de divisores, el cual indica que si n es un número compuesto se puede escribir de la siguiente manera:

$$n = p_1^{a1} \cdot p_2^{a2} \cdot p_3^{a3} \cdot \ldots \cdot p_k^{ak}$$

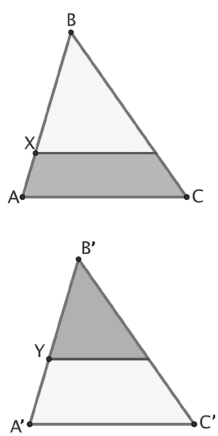
Donde $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ son primos, y $a_1, a_2, a_3, ..., a_k$ son naturales. Luego la cantidad de divisores de n está dada por:

$$(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot (a_3 + 1) \cdot \ldots \cdot (a_k + 1)$$

Problema 324. ¿Cuántos números enteros de 3 dígitos positivos pueden ser representados como la suma de exactamente nueve potencias diferentes de 2?

Solución. Como queremos escribir un número de 3 dígitos como la suma de 9 diferentes potencias de 2, necesariamente estas potencias deben tener 3 o menos dígitos, por lo tanto, nos sirven las potencias $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$,$2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = 256$, $2^9 = 512$, o sea solo 10 potencias de 2 que suman 1023, y como necesitamos 9 distintas debemos excluir solo una. Cuando excluimos al 512 obtenemos un número menor que mil (con tres dígitos), lo mismo ocurre si excluimos solo el 256, o solo el 128, o solo el 64, o solo el 32, el 16 no lo podemos excluir, pues la suma sería mayor que, luego se pueden escribir solo 5 números.

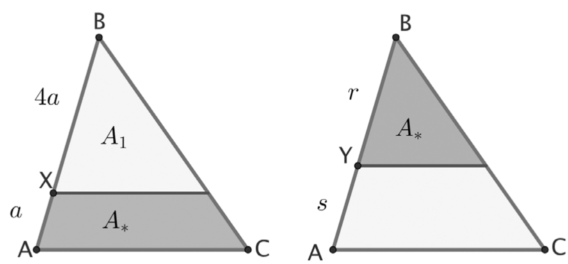
Problema 325. Dados los triángulos ABC y $A'B'C'$ congruentes, se traza un segmento paralelo a la base AC que pasa por X y un segmento paralelo a la base $A'C'$ que pasa por Y. Si las áreas de las regiones sombreadas son las mismas y los segmentos BX y XA están en la razón 4 : 1. ¿En qué razón están los segmentos $B'Y$ y YA'?



Solución. Como las líneas trazadas en ambos casos son paralelas a las bases, esto determina que los triángulos interiores son semejantes al triángulo mayor.

Como en dos triángulos semejantes la razón de semejanza de las áreas es igual a la razón de semejanza de los lados al cuadrado se tiene que:

$$\frac{A_1}{A_{ABC}} = \left(\frac{4}{5}\right)^2$$
$$\frac{A_1}{A_{ABC}} = \frac{16}{25}$$
$$A_1 = \frac{16}{25} A_{ABC}$$



Luego $A* = A_{ABC} - A_1 = A_{ABC} - \frac{16}{25} A_{ABC} = \frac{9}{25} A_{ABC}$

Supongamos que los segmentos BY y YA están en la razón $\frac{r}{s}$, entonces:

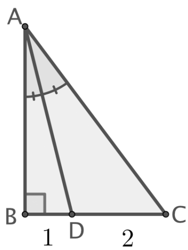
$$\frac{A_*}{A_{ABC}} = \left(\frac{r}{s+r}\right)^2$$
$$A* = \frac{r^2}{(s+r)^2} \cdot A_{ABC}$$

Por lo tanto $\frac{r^2}{(s+r)^2} \cdot A_{ABC} = \frac{9}{25} \Rightarrow \frac{r}{s+r} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{r}{s} = \frac{3}{2}$.

Problema 326. En un triángulo rectángulo, la bisectriz de un ángulo agudo divide el lado opuesto en segmentos de longitud 1 y 2. ¿Cuál es la longitud de la bisectriz?

Solución. Una vez dibujado el triángulo con las condiciones del enunciado, podemos utilizar el teorema de la bisectriz, donde:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AB}{AC}$$



Luego $AC = 2AB$, utilizando el teorema de Pitágoras se tiene que $AB^2 + 33 = (2AB)^2 \Rightarrow 9 = 3AB^2 \Rightarrow AB^2 = 3$. Además, $AB^2 + 1^2 = AD^2 \Rightarrow 3 + 1 = AD^2 \Rightarrow AD = 2$.

Problema 327. Determine de cuántas maneras se pueden elegir los dígitos a, b, c tal que $\overline{ab} < \overline{bc} < \overline{ca}$, donde $\overline{xy}$ representa un número de decena x y unidad y.

Solución. Como $\overline{ab} < \overline{bc} < \overline{ca}$ entonces a < b < c, es decir, las decenas de los números siempre serán crecientes. Analicemos, la forma de las tripletas abc que cumplen la condición cuando el primer dígito es 1:

123, 124, 125, 126, 127, 128, 129 (7 números)
134, 135, 136, 137, 138, 139 (6 números)
145, 146, 147, 149 (5 números)
...
178, 179 (2 números)
189 (1 número)

En total 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28 números.

Analicemos la forma del número de tres dígitos que cumple la condición cuando el primer dígito es 2:

234, 235, 236, 237, 238, 239 (6 números)
245, 246, 247, 248, 249 (5 números)
...
278, 279 (2 números)
289 (1 número)

En total 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21 números.

De este modo cuando el número comience con 3 habrá 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 números y así sucesivamente.

Finalmente, en total habrá:

$$(7+6+5+4+3+2+1)+(6+5+4+3+2+1)+(5+4+3+2+1)$$
$$+(4+3+2+1)+(3+2+1)+(2+1)+1$$
$$=7+2\cdot 6+3\cdot 5+4\cdot 4+5\cdot 3+6\cdot 2+7\cdot 1$$
$$=7+12+15+16+15+12+7$$
=84 números.

Problema 328. Cuando uno de los números 1, 2, 3, ..., $n-1$, n fue eliminado, la media de los números restantes fue 4,75. ¿Qué número fue eliminado?

Solución. Observemos que la media de los números enteros desde 1 hasta n es:

$$\frac{1+2+3+\ldots+n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n}$$

Notemos que al quitar el número más grande de esta lista, es decir n, obtenemos la media más pequeña, es decir:

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}-n}{n-1} = \frac{\frac{n^2-n}{2}}{n-1} = \frac{n(n-1)}{2(n-1)} = \frac{n}{2}$$

Por otra parte, al quitar el número más pequeño de esta lista, es decir 1, obtenemos la media más grande, es decir:

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}-n}{n-1} = \frac{\frac{n^2+n-2}{2}}{n-1} = \frac{(n+2)(n-1)}{2(n-1)} = \frac{n+2}{2}$$

En particular, el promedio $\frac{19}{4}$ debe estar entre $\frac{n}{2}$ y $\frac{n+2}{2}$, es decir:

- $\frac{19}{4} \geq \frac{n}{2} \Rightarrow n \leq \frac{19}{2}$, pero como n es entero, se tiene que $n \leq 9$.
- $\frac{19}{4} \leq \frac{n+2}{2} \Rightarrow n+2 \geq \frac{19}{2} \Rightarrow n \geq \frac{15}{2}$, pero como n es entero, se tiene que $n \geq 8$.

Luego, $n = 8$ o $n = 9$, Pero si $n = 8$ al eliminar uno de los números, el promedio de los restantes debería ser $\frac{19}{4}$, y por lo tanto la suma de los 7 números debería ser $\frac{19}{4}\cdot 7$ lo que es imposible pues la suma de enteros es entera y $\frac{19}{4}\cdot 7$ no es entero, de modo que $n = 9$.

Por último, si $n = 9$ al eliminar un k de entre ellos, el promedio de los restantes debería ser $\frac{19}{4}$, es decir:

$$\frac{\frac{9(9+1)}{2}-k}{9-1} = \frac{19}{4} \Rightarrow k = 7$$

Problema 329. Se escriben diez números distintos en una pizarra. Cualquier número que sea igual al producto de los otros nueve números, se subraya. ¿Cuántos números se pueden subrayar como máximo?

Solución. Sea $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{10} = P$, supongamos que existe a_k entre a_1 y a_{10}, de modo que si subraya el producto de los otros nueve números es igual a a_k, es decir, $\frac{P}{a_k} = a_k$, entonces $P = a_k^2$, por lo tanto hay solo dos valores para a_k, que son, $\sqrt{P}$ y $-\sqrt{P}$.

Podemos ver que este caso ocurre cuando 8 de estos números son racionales y al multiplicarlos se obtiene -1, otro número es -1 y el otro número es 1. De este modo se puede subrayar el -1, pues al multiplicar los 8 números por 1 el resultado es -1, y también se puede subrayar el 1, pues al multiplicar los 8 números por -1 el resultado es 1.

Problema 330. Varios puntos se marcan en una línea, y se trazan todos los segmentos posibles entre parejas de estos puntos. Uno de los puntos se encuentra en 80 de estos segmentos (no como extremo); otro punto se encuentra en 90 de estos segmentos (no como extremo). ¿Cuántos puntos fueron marcados en la línea?

Solución. Notemos que si tenemos 8 puntos en una recta y se trazan todos los segmentos posibles entre parejas de estos puntos, entonces el segundo punto tiene 1 punto a su izquierda y 6 puntos a su derecha, por lo tanto, dicho punto se encuentra en $1 \cdot 6 = 6$ de los segmentos trazados, el tercer punto tiene 2 puntos a su izquierda y 5 puntos a su derecha, por lo tanto, dicho punto se encuentra en $2 \cdot 5 = 10$ de los segmentos trazados. Por otra parte, si un punto se encuentra en 12 de los segmentos trazados, puede que tenga 3 puntos a su izquierda y 4 puntos a su derecha, pues $3 \cdot 4 = 12$, o 4 puntos a su izquierda y 3 puntos a su derecha, pues $4 \cdot 3 = 12$, o 2 puntos a su izquierda y 6 puntos a su derecha, pues $2 \cdot 6 = 12$, o 6 puntos a su izquierda y 2 puntos a su derecha, pues $6 \cdot 2 = 12$, o 1 punto a su izquierda y 12 puntos a su derecha, pues $1 \cdot 12 = 12$, o 12 puntos a su izquierda y 1 punto a su derecha, pues $12 \cdot 1 = 12$.

Como:

- $80 = 1 \cdot 80$, un punto se encuentra en 80 de los segmentos trazados, si hubiera $80 + 1 + 1 = 82$ puntos, contándolo a él.
- $80 = 2 \cdot 40$, un punto se encuentra en 80 de los segmentos trazados, si hubiera $40 + 2 + 1 = 43$ puntos, contándolo a él.
- $80 = 4 \cdot 20$, un punto se encuentra en 80 de los segmentos trazados, si hubiera $20 + 4 + 1 = 25$ puntos, contándolo a él.
- $80 = 5 \cdot 16$, un punto se encuentra en 80 de los segmentos trazados, si hubiera $16 + 5 + 1 = 22$ puntos, contándolo a él.
- $80 = 8 \cdot 10$, un punto se encuentra en 80 de los segmentos trazados, si hubiera $10 + 8 + 1 = 19$ puntos, contándolo a él.

Como:

- $90 = 1 \cdot 90$, un punto se encuentra en 90 de los segmentos trazados, si hubiera $90 + 1 + 1 = 92$ puntos, contándolo a el.
- $90 = 2 \cdot 45$, un punto se encuentra en 90 de los segmentos trazados, si hubiera $45 + 2 + 1 = 48$ puntos, contándolo a el.
- $90 = 3 \cdot 30$, un punto se encuentra en 90 de los segmentos trazados, si hubiera $30 + 3 + 1 = 33$ puntos, contándolo a el.
- $90 = 5 \cdot 18$, un punto se encuentra en 90 de los segmentos trazados, si hubiera $18 + 5 + 1 = 24$ puntos, contándolo a el.

- $90 = 6 \cdot 15$, un punto se encuentra en 90 de los segmentos trazados, si hubiera $15 + 6 + 1 = 22$ puntos, contándolo a el.

- $90 = 9 \cdot 10$, un punto se encuentra en 90 de los segmentos trazados, si hubiera $10 + 9 + 1 = 20$ puntos, contándolo a el.

Por lo tanto, si uno de los puntos se encuentra en 80 de los segmentos (no como extremo) y otro punto se encuentra en 90 de los segmentos (no como extremo), fueron marcados 22 puntos en la línea.

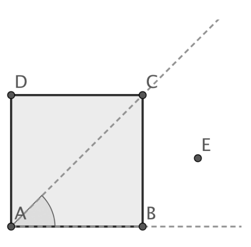
Problema 331. ¿Cuántos números de dos dígitos xy existen tal que al sumarle el número de dos dígitos yx se obtiene un múltiplo de 7?

Solución. Notemos que sumar los números xy e yx es equivalente a sumar $10x + y + 10y + x = 11x + 11y = 11(x + y)$ y como queremos que la suma sea múltiplo de 7, necesariamente $x + y$ es múltiplo de 7, y necesariamente $x + y$ es menor que 18, pues x, y son dígitos. Por lo tanto, $x + y$ es 7 o 14, así los posibles números son:

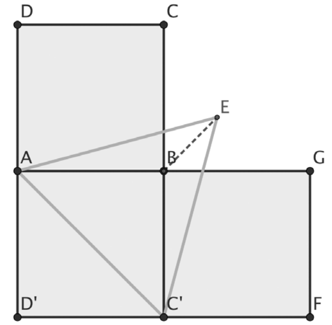
- $16 + 61 = 77$
- $61 + 16 = 77$
- $25 + 52 = 77$
- $52 + 25 = 77$
- $43 + 34 = 77$
- $34 + 43 = 77$
- $59 + 95 = 154$
- $95 + 59 = 154$
- $68 + 86 = 154$
- $86 + 68 = 154$
- $77 + 77 = 154$

Por lo tanto existen 11 números.

Problema 332. Dado un cuadrado $ABCD$ y un punto E al interior del ángulo CAB, se tiene que $AE = BD$ y que BE es perpendicular a BD. Determina la medida del ángulo BAE.



Solución. Dado el cuadrado $ABCD$ construimos el cuadrado $ABC'D'$ simétrico con respecto al lado AB y el cuadrado $BC'FG$ simétrico con respescto al punto B, también trazamos la diagonal AC' (simétrica de AC con respecto a AB). Recordemos que BE es perpendicular a la diagonal BD, por lo tanto, también es perpendicular a la diagonal BF, por lo tanto $C'E = BF$, luego el triángulo $AC'E$ es equilátero, por lo que $\angle EAC' = 60º = \angle EAB + 45º$, entonces $\angle EAB = 15$.



Problema 333. Dado un cuadrilátero $ABCD$ con $\angle ABC = \angle ADC = 90^o$, $AB = BC$ y $AD + DC = 20$: Calcule su área.

Solución. Sea $DC = x$, como $AD+DC = 20$, entonces $AD = 20-x$, por lo tanto, el área del triángulo ADC es:

$$\frac{x(20-x)}{2} = \frac{20x - x^2}{2}$$

Por otra parte, podemos calcular AC utilizando teorema de Pitágoras:

$$AC^2 = x^2 + (20-x)^2 \Rightarrow AC = \sqrt{400 - 40x + 2x^2}$$

Como el triángulo ABC se puede inscribir en una circunferencia, se tiene que $OA = OB = OC = \frac{\sqrt{400-40x+2x^2}}{2}$ pues son radios, además, como el triángulo ABC es isósceles se tiene que OB es altura. Luego, el área del triángulo ABC es:

$$\frac{\sqrt{400-40x+2x^2} \cdot \frac{\sqrt{400-40x+2x^2}}{2}}{2} = \frac{400 - 40x + 2x^2}{4}$$

Finalmente, el área total es:

$$\frac{20x - x^2}{2} + \frac{400 - 40x + 2x^2}{4} = \frac{40x - 2x^2 + 400 - 40x + 2x^2}{4} = 100$$

Problema 334. De los números naturales del 1 al 9 uno de ellos es borrado. De los 8 que quedan, 2 se multiplican y los restantes 6 se suman, resultando el producto igual a la suma. ¿De Cuántas maneras se puede elegir el número que se borra al inicio?

Solución. Notemos que los números naturales del 1 al 9 suman 45, sea k el número que es borrado, por lo tanto:

$$36 \leq 45 - k \leq 44$$

Supongamos que de los números que quedan se multiplican los números a y b, por lo tanto:

$$\begin{aligned} a \cdot b = 45 - k - a - b \ &\Rightarrow a \cdot b + a + b = 45 - k \\ &\Rightarrow (a+1)(b+1) - 1 = 45 - k. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Y como $36 \leq 45 - k \leq 44$ entonces:

$$36 \leq (a+1)(b+1) - 1 \leq 44 \Rightarrow 37 \leq (a+1)(b+1) \leq 45$$

Por lo que la condición la cumplen los pares (3, 9), (4, 8), (4, 7) y (5, 6).

- Para el par $(a, b) = (3, 9) \overset{(1)}{\Longrightarrow} k = 45 - 4 \cdot 10 + 1 = 6$, así de la lista 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, eliminamos el 6 y obtenemos que $3 \cdot 9 = 1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 = 27$.

- Para el par $(a, b) = (4, 8) \overset{(1)}{\Longrightarrow} k = 45 - 5 \cdot 9 + 1 = 1$, así de la lista 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, eliminamos el 1 y obtenemos que $4 \cdot 8 = 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 9 = 32$.

- Para el par $(a, b) = (4, 7) \overset{(1)}{\Longrightarrow} k = 45 - 5 \cdot 8 + 1 = 6$, así de la lista 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, eliminamos el 6 y obtenemos que $4 \cdot 7 = 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 9 = 28$.

- Para el par $(a, b) = (5, 6) \overset{(1)}{\Longrightarrow} k = 45 - 6 \cdot 7 + 1 = 4$, así de la lista 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, eliminamos el 4 y obtenemos que $5 \cdot 6 = 1 + 2 + 3 + 7 + 8 + 9 = 30$.

Finalmente, el número que se borra al inicio, se puede borrar de 4 maneras.

Problema 335. ¿Cuantos prismas rectos con dimensiones enteras x, y, z ($x \leq y \leq z$) existen, tal que el área total es el doble de su volumen, ignorando la unidad de medida?

Solución. Como el área total es el doble de su volumen, entonces:

$$2xy + 2xz + 2yz = 2xyz \ / \div 2xyz$$

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 1$$

Notemos que los enteros buscados no pueden ser igual a 1, comencemos probando $x = 2$ e $y = 3$ entonces:

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{6}$$

Por lo tanto $z = 6$.
Probemos ahora con $x = 2$ e $y = 4$ entonces:

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto $z = 4$.
Probemos ahora con $x = 2$ e $y = 5$ entonces:

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{1}{z} = \frac{3}{10}$$

Lo que no es posible, observemos que con $x = 2$ ya no podemos probar con un $y > 5$, pues z sería menor que y.
Probemos ahora con $x = 3$ e $y = 3$ entonces:

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto $z = 3$.

Probemos ahora con $x = 3$ e $y = 4$ entonces:

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = 1$$

$$\frac{1}{z} = \frac{5}{12}$$

Lo que no es posible, observemos que con $x = 3$ ya no podemos probar con un $y > 4$, pues z sería menor que y.
Probemos ahora con $x = 4$ e $y = 4$ entonces:

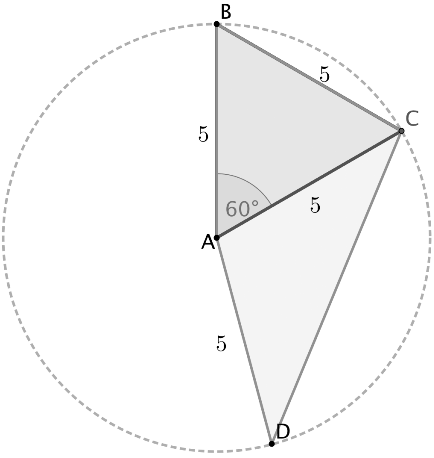
$$\frac{1}{z} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2}$$

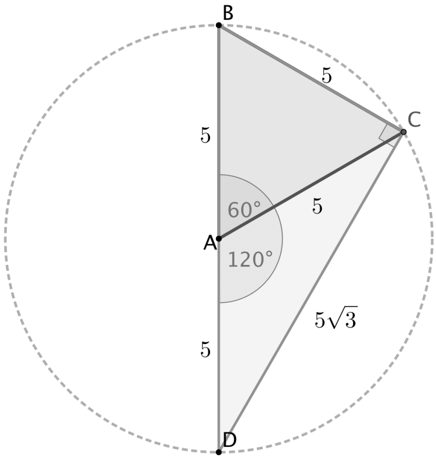
Lo que no es posible, pues $z > y$, observemos que con $x = 4$ ya no podemos probar con un $y > 4$, pues z sería menor que y.
Luego las dimensiones pueden ser: (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3).

Problema 336. En un cuadrilátero convexo, 3 de sus lados y la diagonal miden 5 unidades. ¿Cuántos valores enteros puede tomar el cuarto lado?

Solución. Trazamos a partir de A los lados AB y AD de longitud 5 y la diagonal AC también de longitud 5, entonces podemos ubicar el punto A en el centro de una circunferencia de radio 5 de modo que los lados y la diagonal sean radios. Con el tercer lado BC de longitud 5 se forma un triángulo equilátero ABC como muestra la figura, por lo tanto, para que $ABCD$ sea un cuadrilatero convexo, $\angle CAD$ debe ser menor que $180 - 60 = 120^o$.



Notemos que cuando $\angle CAD = 120^o$ el $\angle BCD = 90^o$ y utilizando pitágoras se tiene que $DC = 5 \cdot \sqrt{3}$, luego como el $\angle CAD$ es menor que 120^o, el lado DC será menor que $5\sqrt{3}$, finalmente, el cuarto lado puede tomar 8 valores enteros (8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1).



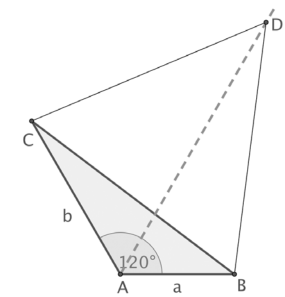
Problema 337. 51 cuervos se sientan en fila en la rama de un árbol. Cuando un cuervo grazna su vecino de la derecha y su vecino de la izquierda salen volando. Cualquier cuervo que vuela regresa en 1 minuto a su lugar anterior y grazna de inmediato. Si el cuervo del extremo izquierdo de la rama es el primero que grazna. ¿Cuántas veces graznó el cuervo del extremo derecho durante los primeros 60 minutos?

Solución. Contemos el número de graznidos utilizando la siguiente tabla, donde en la primera fila enumeramos los cuervos del 1 al 51 y en la primera columna enumeramos los minutos del 0 al 60. Diremos que *G = grazna* y *V = vuela*.

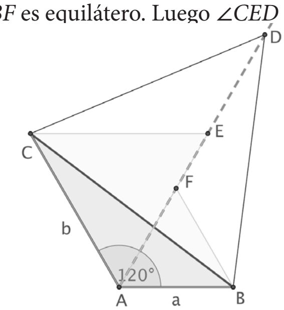
	1	2	3	4	5	…	50	51
0	G	V						
1	V	G	V					
2	G	V	G	V				
3	V	G	V	G	V			
⋮								
48	G	V	G	V	G	…	V	
49	V	G	V	G	V	…	G	V
50	G	V	G	V	G	…	V	G
51	V	G	V	G	V	…	G	V
52	G	V	G	V	G	…	V	G
⋮								
60	G	V	G	V	G	…	V	G

Notemos que en el minuto 0 comienza graznando el cuervo 1, en el minuto 1 el cuervo 2 da su primer graznido, en el minuto 2 el cuervo 3 da su primer graznido, siguiendo la recurrencia observamos que el primer graznido del cuervo 51 será en el minuto 50, y desde ese minuto, graznará solamente en los minutos pares, luego, el cuervo 51 del extremo derecho graznará 6 veces.

Problema 338. En un Triángulo ABC, donde $\angle BAC = 120^{o}$, el punto D Está ubicado en la bisectriz de $\angle BAC$, tal que $AD = AB + AC$. ¿Cuál es la medida del ángulo BDC?



Solución. Sea $AB = a$ y $AC = b$, marcamos en la bisectriz los puntos F y E, tal que $AF = a$ y $AE = b$. Como $AD = a + b$, se tiene que $ED = a$ y $FD = b$. Como la bisectriz de $\angle BAC = 120^{o}$ lo divide en dos ángulos de 60^{o} y como $AC = AE = b$, entonces, el $\triangle ACE$ es equilátero, análogamente, como $AB = AF = a$, implica que $\triangle ABF$ es equilátero. Luego $\angle CED = \angle DFB = 120^{o}$



Como $\angle CED = \angle DFB = \angle CAB = 120^{o}$ y $AB = BF = ED = a$ y $AC = CE = FD = b$, se tiene que los triángulos CBA, CDE y DBF son congruentes, por lo tanto, el triángulo BDC es equilátero, concluyendo que $\angle BDC = 60^{o}$.

Problema 339. Cuatro personas A, B, C, D participan en una carrera. Después de la carrera se afirmó lo siguiente: A llegó primero, B llegó último, C no llegó último y D no llegó ni primero ni último. Si exactamente una de estas afirmaciones es falsa. ¿Quién llegó primero en la carrera?

Solución. Notemos que si la primera afirmación es falsa, entonces A no llego primero, B llegó último, C no llegó último y D no llegó ni primero ni último, por lo que las posibles llegadas son $CADB$ y $CDAB$.

Si la segunda afirmación es falsa, entonces A llegó primero, B no llegó último, C no llegó último y D no llegó ni primero ni último, lo que es imposible, pues nadie llegó último.

Si la tercera afirmación es falsa, entonces A llegó primero, B llegó último, C llegó último y D no llegó ni primero ni último, lo que es imposible pues B y C habrían llegado último.

Si la cuarta afirmación es falsa, entonces A llegó primero, B llegó último, C no llegó último y D llegó primero o llegó último, lo que es imposible pues si A llegó primero y B llegó último, D no puede haber llegado en ninguno de esos dos lugares.

Luego, solo la primera afirmación puede ser falsa, por lo tanto C llegó primero en la carrera. En el caso de que consideremos que algunos participantes podrían haber empatado, entonces A y C podrían haber llegado primero.

Problema 340. Mi mamá plantó cinco claveles de cinco colores distintos en cinco maceteros de la terraza, y los dejó en el

Solución. Siendo rojo=R, morado=M, blanco=B, amarillo=A y naranjo=N, los claveles deberían haber nacido en el siguiente orden:

siguiente orden de izquierda a derecha: rojo, morado, blanco, amarillo y naranjo. Aparentemente, alguien desordenó los maceteros, pues a la izquierda floreció el clavel blanco y en el centro Está comenzando a florecer el clavel naranjo. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un clavel florezca en el lugar donde fue plantado?

R	**M**	**B**	**A**	**N**

Pero ya florecieron dos del siguiente modo:

R	**M**	**B**	**A**	**N**
B	·	N	·	·

Por lo que en los tres espacios que quedan, los tres claveles restantes pueden florecer de las siguientes maneras:

R	**M**	**B**	**A**	**N**
B	·	N	·	·
B	R	N	M	A
B	R	N	**A**	M
B	**M**	N	**A**	R
B	**M**	N	R	A
B	A	N	R	M
B	A	N	M	R

Como en estos 6 casos posibles hay 3 casos favorables, donde al menos un clavel florece en el lugar donde fue plantado, entonces la probabilidad pedida es:

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Problema 341. Dos amigos trotan a una velocidad constante y en línea recta entre los puntos A y B. Ellos comenzaron a trotar al mismo tiempo, uno desde A hasta B y el otro desde B hasta A. Ellos se cruzan por primera vez a 500 metros de distancia de A. Cuando uno de ellos llega al otro extremo, inmediatamente regresa trotando hacia su punto de partida, encontrándose por segunda vez a 250 metros de B. ¿Cuántos metros de distancia hay entre A y B?

Solución. Notemos que en el primer intervalo de tiempo, el corredor ubicado en el punto A avanza 500 metros y el corredor ubicado en el punto B avanza $AB - 500$ metros. En el segundo intervalo de tiempo, el corredor que parti ó en el punto A a recorrido AB +250 metros desde el inicio y el corredor que partió en el punto B a recorrido $2AB - 250$ metros.

Como las distancias recorridas en cada intervalo de tiempo son proporcionales se tiene que:

$$\frac{500}{AB + 250} = \frac{AB - 500}{2AB - 250} \Rightarrow x = 1250$$

Luego la distancia entre A y B es 1250 metros.
En este problema se espera que un niño por tanteo se dé cuenta que por cada 2 metros que avanza el corredor ubicado en el punto A, el corredor ubicado en el punto B avanza 3 metros, de este modo cuando el primer corredor avanza 500 metros el otro avanza 750 metros, cumpliéndose la condición de encontrarse por segunda vez a 250 metros de B.

Problema 342. Un peón está en un tablero de ajedrez ilimitado en todas sus direcciones. En cada paso se mueve a una celda adyacente (no se mueve en diagonal). ¿Cuál es la probabilidad de que el peón después de 4 pasos realizados al azar caiga de nuevo en la celda inicial?

Solución. Utilizando el principio de la multiplicación calculamos el número de casos posibles, pues en el primer paso el peón tiene 4 opciones (*A*=arriba, *B*=abajo, *I*=izquierda, *D*=derecha), en el segundo paso también tiene 4 movimientos posibles, al igual que en el tercer y cuarto paso, luego el peón al dar 4 pasos puede tomar $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$ caminos posibles.

Para contar los caminos favorables (aquellos que llevan al peón al lugar de origen en 4 pasos), contaremos primero aquellos donde el peón da su primer movimiento hacia arriba, y regresa por arriba, siendo estos *AABB, AIDB, ADIB, ABAB.* Contaremos ahora cuando el peón da su primer movimiento hacia arriba, y regresa por la izquierda, siendo estos *AIBD, ABID*. Contaremos ahora cuando el peón da su primer movimiento hacia arriba, y regresa por la derecha, siendo estos *ADBI, ABDI*. Por último contaremos cuando el peón da su primer movimiento hacia arriba, y regresa por abajo, encontrando solo el camino *ABBA*. En total son $4+2+2+1 = 9$ caminos favorables cuando el peón sale hacia arriba, análogamente se encuentran 9 caminos al salir hacia la izquierda, 9 al salir hacia la derecha y 9 al salir hacia abajo. Luego el peón al dar 4 pasos puede tomar $4 \cdot 9$ caminos posibles.

Finalmente la probabilidad de que el peón después de 4 pasos realizados al azar caiga de nuevo en la celda inicial es $\frac{4 \cdot 9}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{9}{64}$.

Problema 343. 51 cuervos se sientan en fila en la rama de un árbol. Cuando un cuervo grazna su vecino de la derecha y su vecino de la izquierda salen volando. Cualquier cuervo que vuela regresa en 1 minuto a su lugar anterior y grazna de inmediato. Si el cuervo del extremo izquierdo de la rama graznó primero. ¿Cuántas veces en total los cuervos graznaron durante la hora transcurrida después de que graznó el cuervo del extremo izquierdo?

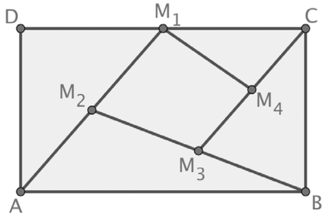
Solución. Contemos el número de graznidos utilizando la siguiente tabla, donde en la primera fila enumeraremos los cuervos del 1 al 51 y en la primera columna enumeraremos los minutos del 0 al 60:

	1	2	3	4	5	…	50	51
0	G	V						
1	V	G	V					
2	G	V	G	V				
• 3	V	G	V	G	V			
…								
48	G	V	G	V	G	…	V	
49	V	G	V	G	V	…	G	V
50	G	V	G	V	G	…	V	G
51	V	G	V	G	V	…	G	V
52	G	V	G	V	G	…	V	G
…								
60	G	V	G	V	G	…	V	G

Notemos que el primer cuervo grazna por primera en el minuto 0 y luego grazna solo en los minutos pares, es decir, grazna 31 veces, el cuervo 2 grazna 30 veces, el cuervo 3 también grazna 30 veces, el cuervo 4 grazna 29 veces, el cuervo 5 también grazna 29 veces, y asi sucesivamente, es decir los que están en posición impar graznan 31, 30, 29, 28, … 6 veces respectivamente, y los que están en posición par graznan 30, 29, 28, … 7, luego en total han graznado:

$$\left(2 \cdot \frac{30 \cdot 31}{2} + 31\right) - \left(2 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} + 6\right) = 925 \text{ veces.}$$

Problema 344. En el rectángulo $ABCD$ que se muestra en la figura, M_1 es el punto medio de DC, M_2 es el punto medio de AM_1, M_3 es el punto medio de BM_2 y M_4 es el punto medio de CM_3. Encontrar la razón entre el área del cuadrilátero $M_1M_2M_3M_4$ y el área del rectángulo $ABCD$.



Solución. Sea a la base del rectángulo y b su altura, por lo tanto $a \cdot b$ es su área. Notemos que en el triángulo DAM_1, $AD = b$ es la base y $DM_1 = \frac{a}{2}$ su altura, luego, el área de $\triangle DAM_1 = \frac{ab}{4}$.

Además, en el triángulo ABM_2, $AB = a$ es la base y $\frac{b}{2}$, que es la distancia entre AB y M_2 es su altura, luego, el área de $\triangle ABM_2 = \frac{ab}{4}$.

Notemos que la distancia entre AD y M_1 es $\frac{a}{2}$, por lo que la distancia entre AD y M_2 es $\frac{a}{4}$, entonces la distancia entre BC y M_2 es $\frac{3a}{4}$ y la distancia entre BC y M_3 es $\frac{3a}{8}$. Luego, la base del triángulo BCM_3 es $BC = b$ y su altura es $\frac{3a}{8}$. Por lo tanto, su área es $\frac{3ab}{16}$.

De manera análoga, observemos que la distancia entre AB y M_2 es $\frac{b}{2}$, por lo que la distancia entre AB y M_3 es $\frac{b}{4}$, entonces la distancia entre DC y M_3 es $\frac{3b}{4}$ y la distancia entre DC y M_4 es $\frac{3b}{8}$, luego la base del triángulo CM_1M_4 es $CM_1 = \frac{a}{2}$ y su altura es $\frac{3b}{8}$, por lo tanto, su área es $\frac{3ab}{32}$.

Luego el área del cuadrilátero es:

$$ab - \left(\frac{ab}{2} + \frac{3ab}{16} + \frac{3ab}{32}\right)$$

$$ab - \frac{25ab}{32}$$

$$\frac{7ab}{32}$$

Finalmente la razón entre el área del cuadrilátero $M_1M_2M_3M_4$ y el rectángulo $ABCD$ es:

$$\frac{M_1M_2M_3M_4}{ABCD} = \frac{\frac{7ab}{32}}{ab} = \frac{7}{32}$$

Problema 345. 96 miembros de un club están de pie en un círculo grande. Empiezan diciendo los números 1, 2, 3, etc., y a la vez, van dando vueltas al círculo. Cada miembro que dice un número par se sale del círculo y el resto continúa. Siguen de este modo hasta que queda solo uno de los miembros. ¿Qué número dijo a este miembro en la primera ronda?

Solución. Los 96 miembros dicen números del 1 al 96, al retirarse los 48 miembros que dicen números pares, el miembro número 1 dice un impar (el 97), hasta que el miembro número 95 dice el 96 + 48 = 144, al retirarse los 24 miembros que dicen números pares, el miembro número 1 dice un impar (el 145), hasta que el miembro número 93 dice el 144 + 24 = 168, al retirarse los 12 miembros que dicen números pares, el miembro número 1 dice un impar (el 167), hasta que el miembro número 89 dice el 168 + 12 = 180, al retirarse los 6 miembros que dicen números pares, el miembro número 1 dice un impar (el 181), hasta que el último miembro dice el 180+6 = 186, al retirarse los 3 miembros que dicen números pares, el miembro número 1 dice un impar (el 187), hasta que el último miembro dice el 186+3 = 189, en este momento solo quedan dos miembros, el que dijo 187 y el que dijo 189, pero el que dijo 187 se debe retirar pues en la siguiente ronda debe decir 190, por lo tanto el miembro que queda es el que dijo 189, explicamos esto con la idea de mostrar que el miembro número 1 queda en todas las rondas, hasta el final.

Para resolver el problema tomemos un caso más pequeño con un divisor de 96, por ejemplo 12, de modo que se cumpla que el miembro 1 quede hasta el final, y ejemplificaremos el retiro de los miembros por medio de la siguiente tabla:

Miembro Nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ronda 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ronda 2	13	·	14	·	15	·	16	·	17	·	18	·
Ronda 3	19	·	·	·	20	·	·	·	21	·	·	·
Ronda 4	22	·	·	·	·	·	·	·	23	·	·	·

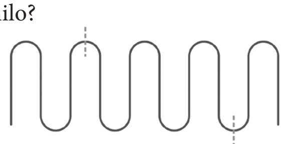
Notemos que el miembro número 1 es el último que se vá, y en la ronda 4 solo queda el miembro 1 y el 9. Por otra parte al retirarse los primeros 6 miembros, queda el miembro 1 y a su lado el 1 + 2 = 3, al retirarse los 3 siguientes, queda el miembro 1 y a su lado el 1 + 22 = 5, al retirarse los siguientes, queda el miembro 1 y a su lado el 1 + 23 = 9, es aquí donde el miembro debe retirarse y quedar solo el miembro 9.

Volviendo al caso original, Los 96 miembros dicen números del 1 al 96, al retirarse los 48 miembros que dicen números pares, queda el miembro número 1 y a su lado el 1 + 2 = 3, al retirarse los siguientes 24 miembros, queda el miembro número 1 y a su lado el 1 + 22 = 5, al retirarse los siguientes 12 miembros, queda el miembro número 1 y a su lado el 1+23 = 9, al retirarse los siguientes 6 miembros, queda el miembro número 1 y a su lado el 1+24 = 17, al retirarse los siguientes 3 miembros, queda el miembro número 1 y a su lado el 1 + 25 = 33, hasta que solo quedan 2 miembros, el miembro número 1 y a su lado el 1 + 26 = 65, es aquí donde se retira el miembro número 1, quedando solo el número 65.

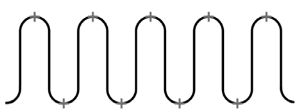
Problema 346. Miguel corta una pizza en cuatro partes iguales. Luego corta cada una de ellas en tres partes iguales. ¿Qué fracción de la pizza es cada una de los trozos que ha obtenido?

Solución. Luego de obtener cuatro partes iguales de pizza, Miguel corta cada una de ellas en tres partes iguales, obteniendo 4·3 = 12 partes iguales de pizza. Luego cada trozo obtenido corresponde a un doceavo de la pizza.

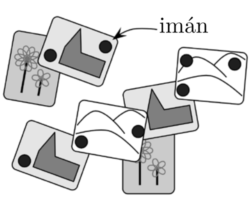
Problema 347. Un hilo de longitud 10 cm se dobla en partes iguales como se muestra en la figura. El hilo se corta en los dos puntos marcados. ¿Cuáles son las longitudes de las tres partes en que ha quedado dividido el hilo?



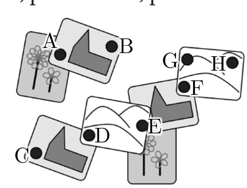
Solución. Si se realizan los 9 cortes marcados en la figura de abajo, se obtienen 10 trozos congruentes de hilo. Como el hilo tiene una longitud de 10 cm, cada trozo mide 1 cm. Concluyendo que al cortar el hilo en los dos puntos marcados inicialmente este queda dividido en tres partes de longitud 3 cm, 5 cm y 2 cm.



Problema 348. En el refrigerador de Luisa hay colocados 8 imanes (representados en la figura por círculos negros) sujetando varias tarjetas. ¿Cuál es el mayor número de imanes que puede quitar de manera que ninguna tarjeta caiga al suelo?



Solución. Sean *A, B, C, D, E, F, G, H* los imanes colocado en el refrigerador de Luisa. Notemos que el imán *A* permite sujetar ambas tarjetas de la esquina superior izquierda, por lo tanto, podemos quitar el imán *B.* Entre los imanes ubicados más abajo, *E* sostiene 3 tarjetas, por lo tanto, podemos quitar *D* pero no *C.*



Por último, entre *F, G* y *H* debemos dejar solo un imán en el refrigerador, pudiendo quitar 2 de ellos. Luego, Luisa puede quitar hasta 4 imanes de manera que ninguna tarjeta caiga al suelo.

Problema 349. La madre de Alicia quiere ver un cuchillo a la derecha y un tenedor a la izquierda de cada plato. ¿Cuántos intercambios de cuchillo y tenedor, como mínimo, tendrá que hacer Alicia para complacer a su madre?

Solución. Alicia a lo menos debe hacer 2 intercambios:

- El tenedor de la derecha del primer plato con el cuchillo de la izquierda del segundo plato.
- El tenedor del tercer plato con el cuchillo del tercer plato.

Problema 350. Un ciempiés tiene 100 pies pero solo 25 pares de zapatos. Si el necesita un zapato para cada uno de sus pies. ¿Cuántos zapatos más necesita comprar?

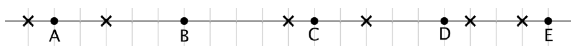
Solución. Los 25 pares de zapatos que tiene el ciempiés le sirven para 50 de sus pies. Luego, necesita comprar 50 zapatos más.

Problema 351. María, Ana y Natalia trabajan en una guardería infantil. La guardería atiende de Lunes a Viernes, y siempre hay exactamente dos de ellas trabajando. María trabaja tres días a la semana y Ana, cuatro días a la semana. ¿Cuántos días a la semana trabaja Natalia?

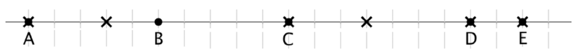
Solución. Si la guardería atiende 5 días por semana y siempre hay exactamente dos de ellas trabajando, entonces se deben cubrir 10 turnos cada semana. Maria y Ana cubren $3 + 4 = 7$ turnos. Luego, los 3 turnos faltantes son cubiertos por Natalia, es decir, Natalia trabaja 3 días a la semana.

Problema 352. Cinco ardillas, *A*, *B*, *C*, *D* y *E* están situadas en los puntos marcados en la recta de la figura. En los puntos marcados con × hay 6 nueces (una nuez en cada ×). En un momento determinado las ardillas corren hacia la nuez más próxima, todas a la misma velocidad. En cuanto una ardilla atrapa una nuez, sigue corriendo hacia la más cercana. ¿Qué ardilla atrapará dos nueces?

Solución.



Notemos que cuando las ardillas *A, C, D* y *E* corren hacia la nuez más próxima, cada una atrapa una nuez en el mismo instante, quedando en las siguientes posiciones:



La siguiente nuez es atrapada por la ardilla *B* cuando avanza hacia la izquierda. Hasta ahora cada ardilla tiene una nuez, quedando solo una nuez libre la cual es atrapada por *C*. Luego, *C* atrapa dos nueces.

Problema 353. En una clase hay 30 estudiantes que siempre se sientan en parejas, de manera que cada hombre está sentado con una mujer, y exactamente la mitad de las mujeres están sentadas junto a un hombre. ¿Cuántos hombres hay en esa clase?

Solución. Sea m el número de mujeres y $30 - m$ el número de hombres. Si cada hombre está sentado con una mujer y la mitad de las mujeres ($\frac{m}{2}$) están sentadas junto a un hombre ($30 - m$), entonces:

$$\frac{m}{2} = 30 - m$$

$$\begin{aligned} m &= 60 - 2m \\ 3m &= 60 \\ m &= 20 \end{aligned}$$

Problema 354. Se escribe el número 2581953764 en una tira de papel. Juan hace dos cortes en la tira, obteniendo tres números. A continuación, Juan suma esos tres números. ¿Cuál es el menor

Solución. Sabemos que, un entero de n cifras es mayor que un entero con n − k cifras, donde n > k, por lo tanto, los cortes deberán dejar tres números, dos de tres cifras y uno de 4 cifras, donde el número de 4 cifras solo puede comenzar con las cifras 2, 1 o 3 y como la suma debe tener el menor valor posible, el número de cuatro cifras debe empezar con 1. Luego, los corte valor posible que puede tener esa suma?

debe ser entre 8 y 1, obligando al corte entre 3 y 7, obteniendo los números 258, 1953 y 764 los que suman 2975.

Problema 355. La abuela compra suficiente comida para alimentar a sus cuatro gatos durante 12 días. En su camino a casa, encuentra dos gatos abandonados y se los lleva también a casa. Si le da a cada gato la misma cantidad diaria de alimento, ¿para cuántos días tendrá comida?

Solución. Si la abuela compra comida suficiente para alimentar a sus 4 gatos durante 12 días, concluimos que si ella tuviera 1 gato el alimento le duraría $12 \cdot 4 = 48$ días. Como la abuela lleva a casa a 2 gatos más, se tiene que para 6 gatos la comida durará $48 \div 6 = 8$ días.

Problema 356. Cada letra de la palabra *BENJAMIN* representa una de las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6 o 7. Letras distintas representan cifras distintas. El número *BENJAMIN* es impar y divisible por 3. ¿Qué cifra le corresponde a la N?

Solución. Como el número *BENJAMIN* es impar, N es impar. Como el número *BENJAMIN* es divisible por 3, entonces la suma de sus dígitos es múltliplo de 3. Luego, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + N = 28 + N$ es mútliplo de 3, concluyendo que $N = 5$.

Problema 357. Ricardo escribe todos los números que tienen las siguientes propiedades: la primera cifra (por la izquierda) es un 1; cada una de las cifras siguientes es mayor o igual que la que le precede; y la suma de las cifras del número es 5. ¿Cuántos números ha escrito?

Solución. Cinco números: 11111, 1112, 113, 122, 14.

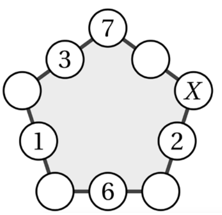
Problema 358. Luis Está montando un pequeño restaurante. Su amigo Gastón le ha dado varias mesas cuadradas y varias sillas. Si usa cada mesa con 4 sillas, necesitaría 6 sillas más. Si uniera las mesas de dos en dos, poniendo 6 sillas en cada una, le sobrarían 4 sillas. ¿Cuántas mesas le dio Gastón?

Solución. Sea m el número de mesas y s el número de sillas que le ha dado Gastón a Luis. Si usa cada mesa con 4 sillas, necesitaría 6 sillas más, es decir $s + 6 = 4m$. Si uniera las mesas de dos en dos, poniendo 6 sillas en cada una, le sobrarían 4 sillas, es decir $s - 4 = 3m$ (6 sillas por cada dos mesas unidas significan 3 sillas por mesa). Luego:

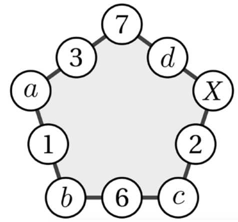
$$s + 6 = 4m$$
$$s - 4 = 3m$$

Restando ambas ecuaciónes se tiene que $m = 10$, es decir Gastón le dio 10 mesas a Luis.

Problema 359. Sebastián escribe números en cinco de los círculos de la figura. Y quiere escribir números en los otros 5 de tal manera que las sumas de los 3 números que hay en cada lado del pentágono sean iguales. ¿Qué número debe escribir en el círculo de la letra X?



Solución.



Sean a, b, c, d los números faltantes en el diagrama, como las sumas de los 3 números que hay en cada lado del pentágono son iguales, se tiene que:

$$\begin{aligned} 7+3+a &= a+1+b \\ 10 &= 1+b \\ 9 &= b \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} b+6+c &= c+2+X \\ 9+6+c &= c+2+X \\ 15 &= 2+X \\ 13 &= X \end{aligned}$$

Problema 360. Un canguro está jugando con su calculadora. Empieza en el número 12. Lo multiplica o divide por 2 o por 3 (si es posible) 60 veces. ¿Cuál de los siguientes números NO puede ser obtenido?

a. 12
b. 18
c. 36
d. 72
e. 108

Solución. Como el canguro empieza con el número 12, entonces:

- $12 \cdot \underbrace{(2 \div 2) \cdot (2 \div 2) \cdot \ldots \cdot (2 \div 2)}_{\text{30 veces}} = 12$

- $12 \cdot (3 \div 2) \cdot \underbrace{(2 \div 2) \cdot (2 \div 2) \cdot \ldots \cdot (2 \div 2)}_{\text{29 veces}} = 18$

- $12 \cdot (3 \cdot 2) \cdot \underbrace{(2 \div 2) \cdot (2 \div 2) \cdot \ldots \cdot (2 \div 2)}_{\text{29 veces}} = 72$

- $12 \cdot (3 \cdot 3) \cdot \underbrace{(2 \div 2) \cdot (2 \div 2) \cdot \ldots \cdot (2 \div 2)}_{\text{29 veces}} = 108$

Notemos que $36 = 12 \cdot 3$, luego debemos multiplicar o dividir, por 2 o por 3, 59 veces, siendo imposible obtener 36.

Podemos generalizar la solución anterior de la siguinete manera:

- Obtener 12 es posible, pues:
$$12 = 12 \cdot 1 = 12 \cdot \frac{2^n \cdot 3^{30-n}}{2^n \cdot 3^{30-n}}$$

- Obtener 18 es posible, pues:
$$18 = 12 \cdot \frac{3}{2} = 12 \cdot \frac{2^n \cdot 3^{29-n}}{2^n \cdot 3^{29-n}}$$

- Obtener 36 NO es posible, pues:

$$36 = 12 \cdot 3 = 12 \cdot 3 \cdot \frac{2^a 3^b}{2^c 3^d}, \text{ donde } a + b + c + d = 59$$

Y como 59 es impar, entonces, $\frac{2^a 3^b}{2^c 3^d} \neq 1; \forall a, b, c, d \in \mathbb{N}$.

- Obtener 72 es posible, pues:

$$72 = 12 \cdot 2 \cdot 3 = 12 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{2^n \cdot 3^{29-n}}{2^n \cdot 3^{29-n}}$$

- Obtener 108 es posible, pues:

$$108 = 12 \cdot 32 = 12 \cdot 32 \cdot \frac{2^n \cdot 3^{29-n}}{2^n \cdot 3^{29-n}}$$

Problema 361. Dados 6 dígitos distintos y no nulos, se forman dos números de tres dígitos ocupando los 6 números. El primer dígito del segundo número es el doble del último dígito del primer número. ¿Cuál es el menor valor posible de la suma de los dos números?

Solución. Si deseamos encontrar el menor valor posible de la suma, asumiremos que los 6 dígitos distintos son 1, 2, 3, 4, 5, 6, ocupando los menores en las centenas y los mayores en las unidades. Pero como la primera cifra del segundo número es el doble de la última cifra del primer número, nos conviene que la última cifra del primer número sea pequeña, luego tenemos los siguientes casos:

- El primer número debe terminar en 1, obligando que el segundo número comience con 2, así el primer número debe comenzar con 3 y el segundo número debe terminar en 6. Luego, los números son 341 y 256, o bien, 351 y 246, obteniendo como resultado el número 597.

- El primer número debe comenzar en 1 y terminar en 2 para que el segundo número comience en 4 y termine en 6. Luego, los números son 132 y 456, o bien, 152 y 436, obteniendo como resultado el número 588.

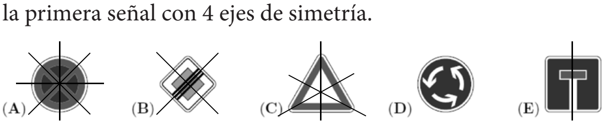
Finalmente el menor valor posible de la suma de los dos números es 588.

Problema 362. ¿Cuántos números enteros hay entre 3,17 y 20,16?

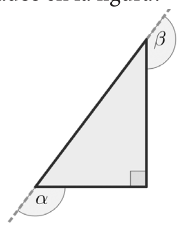
Solución. En dicho intervalo están los enteros desde 4 hasta 20, luego hay 17 números enteros.

Problema 363. Cuál de las siguientes señales de tránsito tiene el mayor número de ejes de simetría?

Solución. La que tiene el mayor número de ejes de simetría es la primera señal con 4 ejes de simetría.



Problema 364. ¿Cuánto vale la suma de los ángulos α y β marcados en la figura?



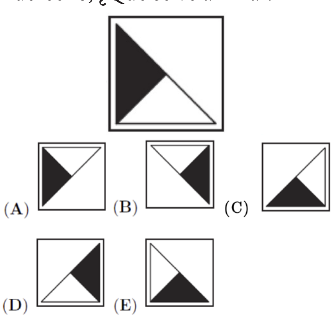
Solución. Notemos que en un triángulo la suma de los ángulos exteriores es 360º, y como en un triángulo rectángulo uno de sus ángulos exteriores mide 90º, la suma $\alpha + \beta = 270º$.

Problema 365. Lorena tiene que sumar 26 a un cierto número. En vez de eso, le resta 26 y obtiene -14. ¿Qué número debería haber obtenido si lo hubiera hecho bien?

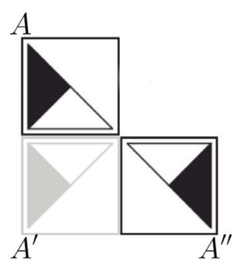
Solución. Debería haber obtenido el número:

$$-14 + 26 + 26 = 38.$$

Problema 366. Juana voltea una carta por su borde inferior y luego repite esto por el borde lateral derecho, ¿Qué se ve al final?



Solución. La siguiente imagen muestra que la alternativa correcta es (B).



Problema 367. Un Canguro reúne 555 grupos de 9 piedras cada uno en un único montón. A continuación, divide el montón resultante en montoncitos de 5 piedras cada uno. ¿Cuántos montoncitos obtiene?

Solución. Obtiene $(555 \cdot 9) \div 5 = 999$.

Problema 368. En el periódico de la escuela se publicó que el 60% de los profesores vienen a la escuela en bicicleta. Esos son 45 profesores. Solo el 12% de nuestros profesores vienen en automóvil. Ese número es:

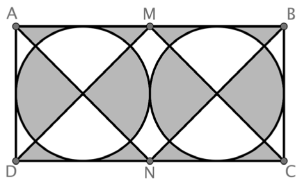
Solución. El problema se resuelve utilizando la siguiente proporción:

$$60 \rightarrow 45 \text{ profesores}$$
$$12 \rightarrow x \text{ profesores}$$

Luego, $x = \dfrac{45 \cdot 12}{60} = 9$ profesores. Equivalentemente si 45 es el 60%, el 12%, que es la quinta parte de 60, será la quinta parte de 45, es decir, 9.

Problema 369. El rectángulo $ABCD$ de la figura tiene un área de 10 cm^2, se dibujan dos circunferencias congruentes tangentes entre sí y tangentes a los lados del rectángulo. Si M y N son puntos medios de AB y DC respectivamente. Calcule el área achurada.

Solución. Notemos que cada sector sombreado tiene un sector no sombreado congruente a él. Por lo tanto, la suma de las áreas de los sectores sombreados es la mitad del área del rectángulo. Por lo tanto, el área sombreada es 5 cm2.

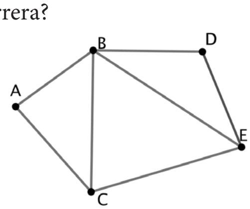


Problema 370. Dos trozos de cuerda miden 1m y 2m de longitud. Se cortan los dos trozos en varias partes, todas de la misma longitud. ¿Cuál de los siguientes NO puede ser el número total de partes que se obtienen?

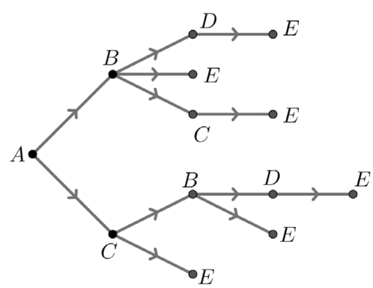
a. 6 **d.** 12
b. 8 **e.** 15
c. 9

Solución. Si se corta el primer trozo en k partes, entonces el segundo trozo se cortará en $2k$ partes, luego el número total de partes es $k + 2k = 3k$, es decir, el número total debe ser un múltiplo de 3, por lo tanto, 8 NO puede ser el número total de partes que se obtienen.

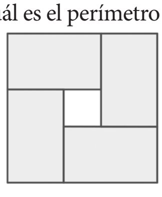
Problema 371. Cuatro ciudades, A, B, C y D están conectadas por carreteras, como se muestra en la figura. Pedro debe organizar la carrera de modo que comience en A y tenga la meta en E. ¿De Cuántas formas Pedro puede trazar la ruta de la carrera?



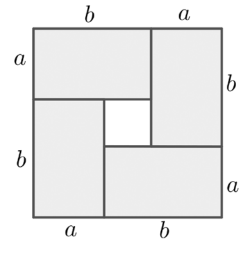
Solución. Observando el siguiente diagrama encontramos 6 formas de organizar la carrera.



Problema 372. La figura muestra cuatro rectángulos iguales situados dentro de un cuadrado. El perímetro de cada rectángulo es 16 cm. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado?



Solución. Si el perímetro de cada rectángulo es 16 cm, entonces, $2a+2b = 16$ cm, luego $a + b = 8$ cm que es el lado del cuadrado. Por lo tanto, el perímetro del cuadrado es $4(a + b) = 4 \cdot 8 = 32$ cm.



Problema 373. Mauricio tiene 49 bolas azules y 1 roja. ¿Cuántas bolas debe retirar para que el 90% de sus bolas sean azules?

Solución. Mauricio debe retirar 40 bolas azules, de modo que queden 9 azules y 1 roja, pues 1 es el 10% del total de las bolas. Luego, el 90% es 9.

Problema 374. ¿Cuál de las siguientes fracciones tiene el valor más próximo a $\frac{1}{2}$?

a. $\frac{25}{79}$
b. $\frac{27}{59}$
c. $\frac{29}{57}$
d. $\frac{52}{79}$
e. $\frac{57}{92}$

Solución. Es equivalente multiplicar cada una de estas fracciones por 2 y buscar cuál es más cercana a 1:

- $\frac{25}{79} \cdot 2 = \frac{50}{79}$
- $\frac{27}{59} \cdot 2 = \frac{54}{59}$
- $\frac{29}{57} \cdot 2 = \frac{58}{57}$
- $\frac{52}{79} \cdot 2 = \frac{104}{79}$
- $\frac{57}{92} \cdot 2 = \frac{114}{92}$

Luego, como $\frac{58}{57}$ es la fracción más cercana a 1, se tiene que $\frac{29}{57}$ es la fracción más cercana a $\frac{1}{2}$.

Problema 375. Se escriben los resultados de los cuartos de final, las semifinales y la final de un torneo en el que no hay empates. Los resultados son (no necesariamente en este orden): *B* gana a *A*, *C* gana a *D*, *G* gana a *H*, *G* gana a *C*, *C* gana a *B*, *E* gana a *F* y *G* gana a *E*. ¿Qué pareja jugó la final?

Solución. Como 8 equipos juegan en cuartos de final, 4 juegan en semifinal y 2 juegan en la final sabemos que el finalista jugó 3 partidos, es decir, *C* y *G* llegaron a la final, ganando *G*.

Problema 376. José, Juan y Jorge son trillizos. Sus hermanos Tomás y Tito son gemelos y son 3 años más jóvenes. ¿Cuál de los siguientes números puede ser la suma de las edades de los 5 hermanos?

a. 36
b. 53
c. 76
d. 89
e. 92

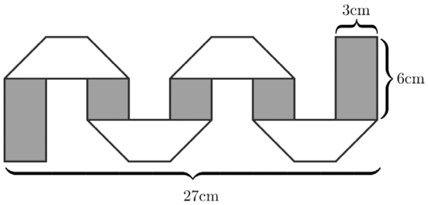
Solución. Si n es la edad de los trillizos, $n-3$ es la edad de los gemelos, entonces, la suma de las 5 edades es $3n + 2 \cdot (n - 3) = 5n - 6$. Luego:

- $5n - 6 = 36 \rightarrow n = \frac{42}{5}$
- $5n - 6 = 53 \rightarrow n = \frac{59}{5}$
- $5n - 6 = 76 \rightarrow n = \frac{82}{5}$
- $5n - 6 = 89 \rightarrow n = \frac{95}{5} = 19$

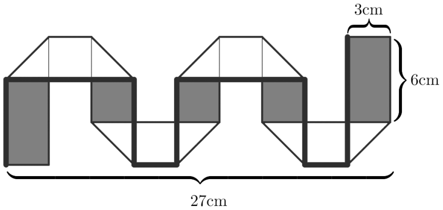
Luego, la suma de las edades de los 5 hermanos puede ser 89.

Problema 377. Una tira de papel, de 3 cm de ancho, es gris de un lado y blanca del otro. Se dobla la tira, como se muestra en la figura. Si los trapecios blancos son congruentes, los rectángulos grises son congruentes y los cuadrados grises son congruentes. Si la figura solo muestra la tira doblada, con las medidas parciales indicadas. ¿Cuál es la longitud de la tira original?

Solución.



Notemos que la línea gruesa marca uno de los bordes de la tira. Luego, la tira mide 6 + 9 + 6 + 3 + 6 + 9 + 6 + 3 + 9 = 57 cm.



Problema 378. Los canguros Eduardo y Joan empiezan a saltar al mismo tiempo, desde el mismo punto, y en la misma dirección. Dan un salto por segundo. Cada uno de los saltos de Eduardo es de 6 m de largo. El primer salto de Joan es de 1 metro de largo, el segundo 2 metros, el tercero 3 metros y así sucesivamente. ¿Después de cuántos saltos Joan alcanzará a Eduardo?

Solución. Mediante una tabla podemos resolver el problemas contando los metros que avanzan los canguros de la siguiente manera:

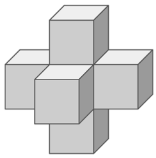
nº de saltos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Joan	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
Eduardo	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66

O bien, si conocemos la fórmula de la suma de los primeros n números naturales, podemos ver que Eduardo al dar n saltos, avanza 6n metros, en cambio Joan al dar n saltos avanza $\frac{n(n+1)}{2}$ metros. Por lo tanto, ellos se encontrarán cuando:

$$\begin{aligned} 6n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ 12n &= n(n+1) \\ 12n &= n^2 + n \\ 0 &= n^2 - 11n \\ 0 &= n(n-11) \end{aligned}$$

Luego, se encuentran cuando $n = 0$ (en la partida) y cuando $n = 11$.

Problema 379. Siete dados se pegan juntos para formar el sólido de la figura. Las caras de los dados que se pegan juntas tienen el mismo número de puntos en ellas. ¿Cuántos puntos hay, en total, en la superficie del sólido?



Solución. Al dado central, que no se ve en la figura, se le pegan los otros 6 dados, quedando ocultos un par de unos, un par de dos, un par de tres, un par de cuatros, un par de cincos y un par de seis, es decir, queda oculta la suma de los puntos de dos dados. Por lo tanto, debemos encontrar la suma de los puntos de 5 dados, dicha suma es:

$$5 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 5 \cdot 21 = 105 \text{ puntos.}$$

Problema 380. En una clase hay 30 estudiantes. Se sientan de dos en dos de modo que cada hombre está sentado con una mujer, y exactamente la mitad de las mujeres están sentadas junto a un hombre. ¿Cuántos hombres hay en esa clase?

Solución. Sea m el número de mujeres y $30 - m$ el número de hombres. Si cada hombre está sentado con una mujer y la mitad de las mujeres ($\frac{m}{2}$) están sentadas junto a un hombre ($30 - m$), entonces:

$$\begin{aligned}\frac{m}{2} &= 30 - m\\ m &= 60 - 2m\\ 3m &= 60\\ m &= 20\end{aligned}$$

Problema 381. En una clase hay 20 estudiantes. Se sientan de dos en dos de modo que exactamente un tercio de los hombres se sienta junto a una mujer, y exactamente la mitad de las mujeres se sienta junto a un hombre. ¿Cuántos hombres hay en la clase?

Solución. Como se sientan en parejas, y un tercio de los hombres se sienta junto a una mujer, y la mitad de las mujeres se sienta junto a un hombre, se deduce que:

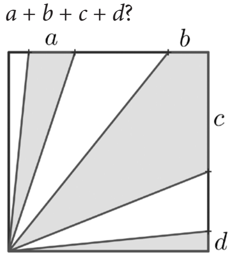
$$\frac{1}{3} \text{ de los hombres} = \frac{1}{2} \text{ de las mujeres}$$

Es decir:

$$\frac{\text{número de hombres}}{\text{número de mujeres}} = \frac{3}{2}$$

Y como en el curso hay 20 estudiantes se concluye que hay 12 hombres y 8 mujeres.

Problema 382. Dentro de un cuadrado de área 36 cm^2 hay regiones sombreadas como se muestra en la figura. El área sombreada total es 27. ¿Cuánto vale $a + b + c + d$?



Solución. Como el cuadrado tiene área 36 cm^2, su lado mide 6 cm. Notemos que los triángulo de base a y d tienen altura 6 cm, además la diagonal del cuadrado divide el cuadrilátero sombreado en dos triángulos de base c y b que también tienen altura 6 cm. Luego, calculamos el área sombreada de la siguiente manera:

$$\frac{a \cdot 6}{2} + \frac{b \cdot 6}{2} + \frac{c \cdot 6}{2} + \frac{d \cdot 6}{2} = 27$$

$$\begin{aligned}6(a + b + c + d) &= 54\\ a + b + c + d &= 9\end{aligned}$$

Luego, el área sombreada es 9 cm^2.

Problema 383. El reloj de Tamara va 10 minutos atrasado, pero ella cree que va 5 minutos adelantado. El reloj de Luisa va 5 minutos adelantado, pero ella cree que va 10 minutos atrasado. En el mismo momento, cada una de ellas mira su propio reloj. Tamara cree que son las 12:00. ¿Qué hora cree Luisa que es?

Solución. Si Tamara cree que son las 12:00 es porque su reloj marca las 12:05 (pues cree que este está adelantado 5 minutos), pero el reloj está atrasado en 10 minutos, es decir son las 12:15. Si son las 12:15 como el reloj de Luisa está adelantado 5 minutos, su reloj marca las 12 : 20 pero ella cree que está atrasado 10 minutos. Luego cree que son las 12:30.

De otro modo podemos hacer la siguiente tabla:

	Hora supuesta	Hora del reloj	Hora real
Tamara	12:00	12:05	12:15
Luisa	12:30	12:20	12:15

Problema 384. Doce chicas se reúnen en un café. Como promedio se come cada una 1,5 dulces. Ninguna de ellas come más de dos dulces y dos de ellas solo beben agua mineral. ¿Cuántas chicas comieron 2 dulces?

Solución. Como en promedio comen 1, 5 dulces cada una, en total comieron $1, 5 \cdot 12 = 18$ dulces ese día, pero como dos de ellas solo beben agua mineral se deduce que entre 10 chicas comieron 18 dulces y como ninguna de ellas come más de 2 dulces, entonces 8 de ellas comen 2 dulces cada una y 2 de ellas comen solo 1 dulce.

Problema 385. Caperucita Roja lleva pasteles a tres abuelitas. Lleva una cesta llena de pasteles. Inmediatamente antes de entrar en cada una de las casas de las abuelitas, el Lobo Feroz se come la mitad de los pasteles que hay en la cesta en ese momento. Cuando sale de la casa de la tercera abuelita ya no quedan pasteles en la cesta. Le da el mismo número de pasteles a cada abuelita. ¿Cuál de los siguientes números es seguro que divide al número inicial de pasteles que había en la cesta?

a. 4
b. 5
c. 6
d. 7
e. 9

Solución. Supongamos que la Caperucita Roja le da k pasteles a cada una de sus abuelitas, entonces Caperucita salió de la casa de su segunda abuelita con $2k$ pasteles, como le dejó k pasteles a la segunda abuelita, entonces entró a su casa con $3k$ pasteles. Por lo tanto, Caperucita salió de la casa de su primera abuelita con $6k$ pasteles, como le dejó k pasteles a la primera abuelita, entonces entró a su casa con $7k$ pasteles, concluyendo que el número inicial de pasteles es $14k$. Finalmente, 7 es seguro que divide al número inicial de pasteles que había en la cesta.

Problema 386. Se escriben en una pizarra varios enteros positivos distintos. El producto de los dos menores es 16 y el producto de los dos mayores es 225. ¿Cuál es la suma de todos los enteros?

Solución. Sean a, b los números menores y p, q los números mayores, en ese orden, entonces, $a \cdot b = 16 = 24$ y $p \cdot q = 225 = 52 \cdot 32$. Como los números escritos en la pizarra son distintos se tiene que $a = 2$ y $b = 8$, o bien, $a = 1$ y $b = 16$. Por otra parte, p puede ser 1, 3, 5, 9, 15, por lo tanto $b < 15$, concluyendo que $a = 2$ y $b = 8$. Luego $p > 8$, es decir, $p = 9$ y $q = 25$.

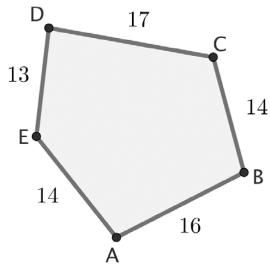
Además como $b = 8$ y $p = 9$, solo hay 4 números en la pizarra, los cuales suman $2 + 8 + 9 + 25 = 44$.

Problema 387. La figura muestra un pentágono. Se dibujan cinco círculos con centros en A, B, C, D y E de tal manera que los dos círculos vecinos son tangentes entre sí. Las longitudes de los lados del pentágono se dan en la figura. ¿Qué punto es el

Solución. Si trazamos un círculo de radio r con centro en A, entonces:

- El círculo con centro en B tiene radio $16 - r$.
- El círculo con centro en C tiene radio $14 - (16 - r) = r - 2$.
- El círculo con centro en D tiene radio $17 - (r - 2) = 19 - r$.
- El círculo con centro en E tiene radio $13 - (19 - r) = r - 6$.

centro del mayor de los círculos dibujados?

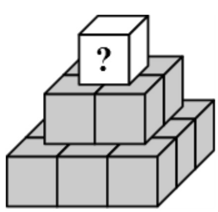


Como $EA = 14$, entonces $(r - 6) + r = 14 \Rightarrow r = 10$. Finalmente:

- El círculo con centro en B tiene radio $16 - 10 = 6$.
- El círculo con centro en C tiene radio $10 - 2 = 8$.
- El círculo con centro en D tiene radio $19 - 10 = 9$.
- El círculo con centro en E tiene radio $10 - 6 = 4$.
- El círculo con centro en A tiene radio $r = 10$.

Por lo tanto, A es el centro del mayor de los círculos dibujados.

Problema 388. Se escribe un entero positivo distinto en cada uno de los 14 cubos de la pirámide mostrada en la figura. La suma de los 9 enteros escritos en el piso más bajo es igual a 50. El entero escrito en cada uno de los demás cubos es igual a la suma de los enteros escritos en los 4 cubos que están debajo de él. ¿Cuál es el mayor entero posible que se puede escribir en el cubo superior?



Solución. Sean $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ los números ubicados en la base, de modo que el siguiente piso contiene los números:

$$a+b+d+e, \quad b+c+e+f, \quad d+e+g+h, \quad e+f+h+i$$

a	b	c
d	e	f
g	h	i

$a+b+d+e$	$b+c+e+f$
$d+e+g+h$	$e+f+h+i$

$$\begin{aligned}
&(a+b+d+e)+(b+c+e+f)+(d+e+g+h)+(e+f+h+i)\\
&=(a+c+g+i)+2\cdot(b+d+f+h)+4e\\
&=(a+b+c+d+e+f+g+h+i)+(b+d+f+h)+3e\\
&=50+b+d+f+h+3e
\end{aligned}$$

Entonces, debemos maximizar el valor de $b+d+f+h+3e$, por lo tanto, b, d, f, h, e deben ser los valores mayores, y como $a+b+c+d+e+f+g+h+i=50$, asignamos los valores menores a: a, c, g, i, es decir, $a+c+g+i=1+2+3+4=10$, por lo tanto, $b+d+f+h+e=40$ y e debe ser el mayor valor posible, pues aparece tres veces en la suma. Luego, $b+d+f+h+e=5+6+7+8+14$, obteniendo que el bloque superior tiene el número $50+b+d+f+h+3e=50+5+6+7+8+42=118$.

Problema 389. Un tren tiene cinco vagones, en cada uno de los cuales hay por lo menos un pasajero. Se dice que dos pasajeros son próximos si están

Solución. Sean a, b, c, d, e el número de pasajeros en cada uno de los cinco vagones, en ese orden. Si cada pasajero tiene o bien 5 o bien 10 pasajeros próximos, se concluye que la suma de los pasajeros de dos contiguos debe ser 6 u 11, pues así cada pasajero tendrá 5 o 10 pasajeros próximos. Luego $a+b=6$ o $a+b$

en el mismo vagón o en vagones contiguos. Cada pasajero tiene o bien 5 o bien 10 pasajeros próximos. ¿Cuántos pasajeros hay en el tren?

$= 11$, pero si $a + b = 11$, se tiene que $c = 0$, lo que es imposible, pues en cada vagón hay por lo menos un pasajero.

Como $a + b = 6$, se tiene que $a + b + c = 11$, $b + c + d = 11$, $c + d + e = 11$ y $d + e = 6$. Por lo tanto, $a + b + c + d + e = 11 + 6 = 17$ pasajeros.

Problema 390. ¿Cuál de los siguientes números es el más próximo al resultado de la operación $\frac{17 \cdot 0{,}3 \cdot 20{,}16}{999}$?

a. 0,01 **d.** 10
b. 0,1 **e.** 100
c. 1

Solución. Notemos que el número $\frac{17 \cdot 0{,}3 \cdot 20{,}16}{999}$ es próximo a:

$$\frac{18 \cdot \frac{1}{3} \cdot 20}{1000} = \frac{120}{1000} = 0,12$$

Luego, entre las alternativas el número más próximo es 0, 1.

Problema 391. Un test consta de 30 preguntas (las posibles respuestas son “verdadero” o “falso”). Vania tiene un 50% más de respuestas correctas que incorrectas. Si Vania contestó todas las preguntas, ¿cuántas respuestas correctas tiene?

Solución. Si x es el número de respuestas incorrectas de Vania, entonces el número de respuestas correctas es:

$$x + 0,5x = 1,5x$$

Como el test tiene 30 preguntas, sabemos que $x + 1,5x = 30$, es decir, $2,5x = 30$. Luego, Vania tiene 12 respuestas incorrectas y 18 respuestas correctas.

Problema 392. Si el entero positivo x se divide por 6, el resto es 3. ¿Cuál será el resto de dividir $3x$ por 6?

Solución. Del enunciado se concluye que $x = 6 \cdot k + 3$ para algún entero k. Luego, multiplicando la ecuación por 3 se tiene que:

$$\begin{aligned} 3x &= 18 \cdot k + 9 \\ 3x &= 18 \cdot k + 6 + 3 \\ 3x &= 6(3 \cdot k + 1) + 3 \end{aligned}$$

Luego, el resto de dividir $3x$ por 6 es 3.

Problema 393. ¿Cuántas semanas son 2016 horas?

Solución. Como 24 horas son un día, se tiene que $24 \cdot 7 = 168$ horas son una semana. Por lo tanto, dividimos 2016 en 168, obteniendo que 2016 horas son 12 semanas.

Problema 394. Cuando era pequeño, Esteban inventó su propio sistema para escribir números negativos antes de aprender el método usual. Contando hacia atrás, escribía: …, 3, 2, 1, 0, 00, 000, 0000, … ¿Cuál es el resultado de 000 + 0000 en esta notación?

Solución. Para todo n positivo, el número $-n$ es representado por $n + 1$ ceros, es decir, n ceros representan el número $-n + 1$. Luego:

$$000 + 0000 = (-2) + (-3) = -5 = 000000$$

Problema 395. Nicolás tiene un dado, las caras muestran los números del 1 al 6, pero él quiere un dado original por lo que ha decidido dejar negativos los números impares ($-1, -3, -5$ en vez de 1, 3, 5). Nicolás lanza dos veces el dado y suma los valores obtenidos. ¿Cuál de los siguientes totales no puede ser obtenido?

a. 3
b. 4
c. 5
d. 7
e. 8

Solución. Usando solo los números $-1, -3, -5, 2, 4, 6$ se tiene que $3 = 4 - 1$, $4 = 2 + 2$, $5 = 6 - 1$, $8 = 4 + 4$. Luego, 7 es imposible.

Problema 396. Víctor escribe cinco enteros positivos (distintos) de una sola cifra. Observa que la suma de ninguna pareja de esos números es 10. ¿Cuál de los siguientes números es seguro que Víctor escribió?

a. 1
b. 2
c. 3
d. 4
e. 5

Solución. Notemos que las parejas de números distintos que suman 10 son $9 + 1$, $8 + 2$, $7 + 3$, $6 + 4$. Como la suma de ninguna pareja de los números de Victor es 10, es seguro que Victor escribió el número 5.

Problema 397. En un torneo eliminatorio de tenis, seis de los resultados de los cuartos de final, las semifinales y la final fueron (no necesariamente en ese orden): *B* gana a *A*, *C* gana a *D*, *G* gana a *H*, *G* gana a *C*, *C* gana a *B* y *E* gana a *F*. ¿Qué resultado falta?

Solución. Ordenemos los resultados en la siguiente tabla:

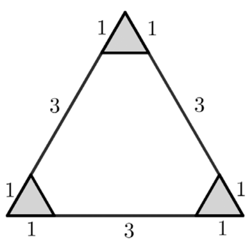
Gana	Pierde
B	A
C	D
G	H
G	C
C	B
E	F

Contemos la cantidad de partidos jugados y ganados por cada equipo:

Equipo	Partidos Jugados	Partidos Ganados
A	1	0
B	2	1
C	3	2
D	1	0
E	1	1
F	1	0
G	2	2
H	1	0

Notemos que si E ganó un partido, entonces jugó 2 partidos, entonces E es uno de los equipos faltantes. Además, si G ganó dos partidos, entonces jugó 3 partidos, luego G es el otro equipo faltante. Y como G jugó más partidos que E entonces el resultado faltante es G gana a E.

Problema 398. ¿Qué porcentaje del área del triángulo Está sombreada en la figura?



Solución. Como el área de un triángulo equilátero de lado a es $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, se tiene que el triángulo de lado 5 tiene área $\frac{5^2\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$ y que cada triángulo de lado 1 tiene área $\frac{1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Luego, el área sombreada es $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, entonces el porcentaje de área sombreada en la figura es:

$$\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\frac{25\sqrt{3}}{4}} = \frac{3}{25} = \frac{12}{100} = 12\%$$

Problema 399. Ana Está haciendo un cuadrado mágico multiplicativo utilizando los números 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 y 100. Los productos de los números situados en cada fila, en cada columna y en las dos diagonales deben ser todos iguales. Si Ana ha comenzado como se ve en la figura. ¿Qué número debe poner en la casilla marcada con x?

20	1	
		x

Solución. Debemos multiplicar los números

$$(1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100) = (2^0, 2^1, 2^2, 5^1, 2\cdot 5, 2^2\cdot 5, 5^2, 2\cdot 5^2, 2^2\cdot 5^2)$$

Obteniendo $2^9 \cdot 5^9 = 10^9$, por lo tanto, para cada fila se debe obtener como producto $2^3 \cdot 5^3 = 10^3 = 1000$, al igual que para cada columna y para cada diagonal. Luego, en la primera fila falta el número 50, por lo que nos falta ubicar los números:

2, 4, 5, 10, 25, 100

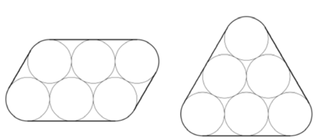
20	1	50
	10	x
	100	

Notemos que la columna central, que parte con 1, necesita que el producto de sus dos casillas vacías sea 1000, es decir, en estas casillas debemos usar los números 100 y 10. Como el producto de la diagonal debe ser 1000, al centro no puede ir 100. Luego, debe ir 10.

20	1	50
	10	x
	100	5

Además, el producto de las casillas de la diagonal debe ser 1000. Por lo tanto, la casilla inferior derecha debe ser 5, lo que obliga a que $x = 4$.

Problema 400. Se desea embalar seis tubos circulares de diámetro 2 cm cada uno por medio de una banda. Las dos opciones posibles se muestran en la figura. ¿Cuál crees tú que es más económica (ocupa menos huincha)? Justifica.



Solución. Notemos que al unir los centros de los tubos que están en las esquinas se genera un romboide y un triángulo equilátero respectivamente, ambos polígonos de perímetro 12 cm. En ambos casos la banda se encuentra a 1 cm de distancia del polígono por lo tanto ambas bandas tienen la misma medida. Luego, no hay una más económica que otra.

Problema 401. Ocho sobres sin marca alguna en el exterior contienen los números 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128. Eva elige unos cuantos sobres al azar, y su compañera Alicia toma los que quedan. Ambas suman los números que hay dentro de los sobres. La suma de Eva es 31 unidades más que la de Alicia. ¿Cuántos sobres tomó Eva?

Solución. Sea E la suma de los números de las sobres de Eva y A la suma de los números de las sobres de Alicia, luego se cumple que $E = A + 31$ y $E + A = 1 + 2 + 4,+8 + 16 + 32 + 64 + 128 = 255$. Resolviendo el sistema de ecuaciones encontramos que la suma de los números de las sobres de Eva es 143. Luego, necesariamente Eva tomó los sobres con los números 1, 2, 4, 8, 128, pues no hay otra suma con resultado 143, concluyendo que Eva tomó 5 sobres.

Problema 402. Tenemos 2016 canguros, cada uno de los cuales puede ser gris o rojo, y al menos hay uno de cada color. Para cada canguro K calculamos el cociente del número de canguros del otro color dividido por el número de canguros del mismo color que K (incluido K). Hallar la suma de las frac-

Solución. Supongamos que hay n canguros grises y $2016-n$ canguros rojos, siendo $n \neq 0$. Para cada canguro gris calculamos el cociente del número de canguros de color rojo dividido por el número de canguros de color gris, y sumamos las fracciones, obteniendo:

$$\underbrace{\frac{2016-n}{n} + \frac{2016-n}{n} + \frac{2016-n}{n} + \ldots + \frac{2016-n}{n}}_{n \text{ veces}}$$

ciones así calculadas, para los 2016 canguros.

Para cada canguro gris calculamos el cociente del número de canguros de color gris dividido por el número de canguros de color rojo, y sumamos las fracciones, obteniendo:

$$\underbrace{\frac{n}{2016-n}+\frac{n}{2016-n}+\frac{n}{2016-n}+\dots+\frac{n}{2016-n}}_{2016-n \text{ veces}}$$

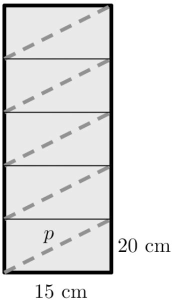
Finalmente:

$$n\cdot\frac{2016-n}{n}+(2016-n)\cdot\frac{n}{2016-n} = (2016-n)+n$$

$$= 2016$$

Problema 403. Una planta se enrolla 5 veces alrededor de un tubo de 1 m de altura y 15 cm de circunferencia, como se muestra en la figura. Cuando sube, la altura se incrementa en una proporción constante. ¿Cuál es la longitud de la planta si la desenrollamos?

Solución. Notemos que si el tubo mide 100 cm, la planta por cada vuelta sube 100÷5 = 20 cm, además si abrimos el tubo de 20 cm de altura, resulta un rectángulo de 20 ×15 donde la planta es la diagonal del rectángulo. Luego, por pitágoras, la longitud del trozo p de la planta cumple que:



$$p^2 = 20^2 + 15^2$$

Obteniendo que $p = 25$ cm. Por lo tanto, la longitud de la planta es de 25 · 5 = 125 cm.

Problema 404. ¿Cuál es el mayor resto posible que puede obtenerse al dividir un número de dos cifras por la suma de sus cifras?

Solución. Notemos que si queremos obtener el mayor resto posible, el divisor debe ser lo más grande posible. Como el divisor corresponde a la suma de dos cifras, este puede ser:

- 9 + 9 = 18, el resto en este caso sería a lo más 17, pero 99÷18 = 18·5+9 (resto 9).
- 9 + 8 = 17 el resto a lo más sería 16, pero 98÷ 17 = 17 · 5 + 13 (resto 13) y 89 ÷ 17 = 17 · 5 + 4 (resto 4).
- 9 + 7 = 8 + 8 = 16 el resto a lo más sería 15, donde 88÷16 = 16 · 5+8 (resto 8), 97 ÷ 16 = 16 · 6 + 1 (resto 1) y 79 ÷ 16 = 16 · 4 + 15 (resto 15).

Notemos que el próximo divisor posible es 15, pero el resto sería a lo más 14. Luego, 15 es el mayor resto posible cuando tenemos 79÷16 = 16 · 4+15.

Problema 405. Un barco a motor tarda 4 horas en navegar, corriente abajo, desde A hasta B. El retorno, contra corriente, desde B hasta A, le lleva 6 horas. Suponiendo que el tronco de madera no encuentra ningún obstáculo en su camino y es llevado solo por la corriente ¿Cuántas horas tardaría este en llegar desde A a B?

Solución. Supongamos que la velocidad del barco es x km/h, que la velocidad de la corriente es y km/h y que la distancia AB es d. Entonces, la velocidad del barco a favor de la corriente es $(x+y)$ y la velocidad del barco en contra de la corriente es $(x - y)$. Además:

$$\text{velocidad} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$

$$\text{tiempo} \cdot \text{velocidad} = \text{distancia}$$

Luego:

$$4 \cdot (x + y) = d \qquad 4x + 4y = d$$
$$6 \cdot (x - y) = d \qquad 6x - 6y = d$$

Multiplicamos la primera ecuación por 3 y la segunda ecuación por (−2), obteniendo:

$$\begin{aligned} 12x + 12y &= 3d \\ -12x + 12y &= -2d \end{aligned}$$

Luego, sumando las ecuaciones, obtenemos que $24y = d$, concluyendo que $y = \frac{d}{24}$, es decir el tronco avanza la distancia d en 24 horas.

Problema 406. En Cangurolandia cada mes tiene 40 días, numerados del 1 al 40. Los días cuyo número es divisible por 6 son vacaciones, así como los días cuyo número es primo. ¿Cuántas veces en un mes habrá un solo día de trabajo entre dos de vacaciones?

Solución. Del 1 al 40 los números divisibles por 6 son {6, 12, 18, 24, 30, 36} y los primos son {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37}. Luego, son vacaciones los días:

·	2	3	·	5	6	7	·	·	·
11	12	13	·	·	·	17	18	19	·
·	·	23	24	·	·	·	·	29	30
31	·	·	·	·	36	37	·	·	·

Luego, el día 4 es el único día que está entre dos días de vacaciones.

Problema 407. Dos de las alturas de un triángulo miden 10 y 11 cm, respectivamente. ¿Cuál es el mínimo valor entero que puede tomar la medida de la tercera altura?

Solución. Sean a, b, c los lados del triángulo, 10, 11 , x las alturas y A su área. Luego:

$$\frac{a \cdot 10}{2} = \frac{b \cdot 11}{2} = \frac{c \cdot x}{2} = A$$

Por lo tanto, $a = \frac{2A}{10}$, $b = \frac{2A}{11}$ y $c = \frac{2A}{x}$. Utilizando la desigualdad triangular $a + b > c$ se obtiene:

$$\frac{2A}{10} + \frac{2A}{11} > \frac{2A}{x}$$

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{11} > \frac{1}{x}$$

$$\frac{21}{110} > \frac{1}{x}$$

$$\frac{110}{21} < x$$

Luego, el mínimo valor entero que puede tomar la medida de la tercera altura es 6 cm.

Problema 408. Joel escribe cuatro enteros positivos consecutivos. A continuación calcula los cuatro totales posibles sumando tres de los enteros. Si ninguno de esos totales es un número primo. ¿Cuál es el menor entero que pudo escribir Joel?

Solución. Supongamos que los números consecutivos son $x - 1, x, x + 1, x + 2$. Luego, los cuatro totales posibles son $3x$, $3x + 1$, $3x + 2$, $3x + 3$.

Notemos que los cuatro totales posibles también son consecutivos, donde el menor total y el mayor total son ambos múltiplos de 3.

Si los primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, . . . y necesariamente entre 2 primos necesitamos tener 4 números consecutivos, dichos consecutivos deben estar entre 23 y 29. Luego, el mínimo total es $24 = 7 + 8 + 9$, el cual cumple la condición de ser múltiplo de 3, siendo 7 el menor entero que pudo escribir Joel.

Problema 409. Cuatro deportistas están sentados alrededor de una mesa redonda. Los deportes que practican son: fútbol, básquetbol, atletismo y natación. Quien juega futbol se sienta a la izquierda de Andrea. Quien practica básquetbol Está sentado frente a Vicente. Eva y Felipe están sentados juntos. La persona sentada a la izquierda de quien practica atletismo es una mujer. ¿Qué deporte practica Eva?

Solución. Notemos que si Eva y Felipe están sentados juntos, Andrea y Vicente también están sentados juntos. Como quien practica básquetbol está sentado frente a Vicente. Se concluye que Andrea no practica básquetbol pues esta al lado de el.

Quien juega fútbol se sienta a la izquierda de Andrea y quien practica básquetbol está sentado frente a Vicente, y como Andrea no practica básquetbol ella no esta frente a Vicente, por lo tanto, Vicente está a la izquierda de Andrea y juega fútbol y el deportista que juega básquetbol está frente a Vicente, es decir, a la derecha de Andrea.

Luego, Eva juega básquetbol o practica atletismo, pero como la persona sentada a la izquierda de quien practica atletismo es una mujer, se concluye que Felipe practica atletismo y Eva juega básquetbol.

Problema 410. Se puede escribir las fechas en la forma *DD/MM/AAAA*. Por ejemplo, el 18 de septiembre de 2016 se

Solución. Sea $AB/CD/EFGH$ la fecha sorprendente. Como necesitamos que la fecha sea lo más próxima posible, fijamos $E = 2$. Luego, A,B,C,D,E, F,G,H pueden tomar solo los siguientes valores:

escribe 18/09/2016. Llamaremos sorprendente a una fecha si los 8 números escritos de esta manera son diferentes. ¿Cuándo será la fecha sorprendente más próxima?

A	B	C	D	E	F	G	H
0	0	0	0		0	0	0
1	1	1	1		1	1	1
				2			
3	3		3		3	3	3
	4		4		4	4	4
	5		5		5	5	5
	6		6		6	6	6
	7		7		7	7	7
	8		8		8	8	8
	9		9		9	9	9

- Si queremos un año cercano a 2016 debemos fijar $F = 0$, obligándonos a tomar $C = 1$ y $A = 3$, pero si $A = 3$ el valor de B debe ser 0 o 1, lo que es imposible. Luego, $F \neq 0$.
- Fijamos $F = 1$, obligándonos a tomar $C = 0$ y $A = 3$, pero si $A = 3$ el valor de B debe ser 0 o 1, lo que es imposible. Luego, $F \neq 1$.
- Fijamos $F = 3$, entonces tomamos $C = 0$ obligándonos a tomar $A = 1$. Luego, para minimizar el año, tomamos $G = 4$ y $H = 5$, para minimizar el mes tomamos $D = 6$ y para minimizar el día tomamos $B = 7$.

Finalmente la fecha sorprendente es 17/06/2345.

Problema 411. En una conferencia, los 2016 participantes están registrados como P_1, P_2, P_3, ..., P_{2016}. Cada participante desde P_1 hasta P_{2015} estrecha la mano de un número de participantes igual a su propio número de registro. ¿Cuántas manos estrechó el participante P_{2016}?

Solución. Si cada uno estrecha la mano de un número de participantes igual a su propio número de registro, entonces:

- P_{2015} estrechó la mano con todos los participantes, es decir, estrechó la mano con P_1, P_2, P_3, ..., P_{2014} y con P_{2016}, por lo tanto, P_1 le dió la mano solo a P_{2015} y no a P_{2016}.

- P_{2014} estrechó la mano con todos los participantes excepto con P_1, es decir, estrechó la mano con P_2, P_3, P_4, ..., P_{2013}, P_{2015}, P_{2016}, por lo tanto, P_2 le dió la mano solo a P_{2015} y a P_{2014} y no a P_{2016}.

- P_{2013} estrechó la mano con todos los participantes excepto con P_1 y P_2, es decir, estrechó la mano con P_3, P_4, P_5, ..., P_{2012}, P_{2014}, P_{2015}, P_{2016}, por lo tanto, P_3 le dió la mano a P_{2015}, a P_{2014} y a P_{2013} y no a P_{2016}.

Luego, cada vez que un participante P_{2016-k} estrecha la mano a P_{2016}, el participante P_k no lo puede hacer, es decir, cuando el participante $P_{2016-1007} = P_{1009}$ estrecha la mano a P_{2016}, el participante P_{1007} no lo puede hacer, por lo tanto, el participante P_{1008} también estrecha la mano a P_{2016}.

Finalmente P_{2016} estrecha la mano con P_{1008}, P_{1009}, P_{1010}, P_{1011}, ..., P_{2015}, es decir con 1008 participantes.

Problema 412. Dado un número de tres dígitos xyz, la suma de sus dígitos es 26. Determine el producto de sus dígitos.

Solución. Si la suma de los tres dígitos es 26, entonces los dígitos son 9, 9 y 8, cuyo producto es $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

Problema 413. Tenemos cajas numeradas desde 1 hasta k y bolas numerada desde el 1 hasta 2016. En la caja 1 se guarda la bola 1, en la caja 2 las siguientes dos bolas (bola 2 y bola 3) en la caja 3 las siguientes 3 bolas (bola 4, bola 5 y bola 6) y así sucesivamente, en ese orden. Si la bola 2016 se guardó en la caja k. ¿Cuál es el valor de k?

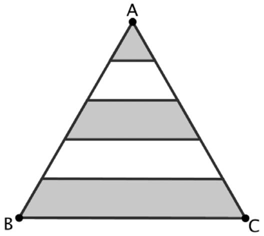
Solución. Notemos que si existieran n cajas, en las cajas 1, 2, 3, …, n se habrían guardado $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ bolas. Como $2016 = \frac{63 \cdot 64}{2}$, se concluye que la bola 2016 es la última bola que se guardó en la caja 63. Por lo tanto, la bola 2017 es la primera bola que se guarda en la caja 64.

Problema 414. Si se suman los dígitos del número xyx (de tres dígitos), el resultado es el número de dos dígitos yz. Si se suman los dígitos de este número, se obtiene el número y de un dígito. Si $x \neq y \neq z$, encuentre la cifra x.

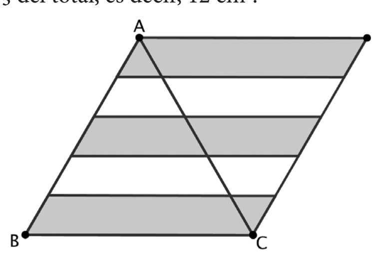
Solución. Como al sumar las cifras del número yz se obtiene el número y de una cifra, concluimos que $z = 0$. Notemos que yz al ser la suma de tres dígitos $(x + y + x)$, a lo más es $9 + 8 + 9 = 26$. Luego, si $z = 0$, entonces $yz = 10$ o $yz = 20$.

Como $x+y+x = yz$, e yz es par, necesariamente y es par, pues $x+x = 2x$ es par. Luego, $yz = 20$. Como $yz = 20$, entonces $x+y+x = x+2+x = 20$. Finalmente, $x = 9$.

Problema 415. En el triángulo ABC de la figura se han trazado 4 rectas paralelas a la base del triángulo a igual distancia una de otra. Si el triángulo ABC tiene área 10 cm². Determine el área sombreada.



Solución. Notemos que el paralelógramo de la figura esta formado por el triángulo ABC y por otro triángulo congruente a él, dicho paralelógramo tiene 20 cm² de área. Como las 4 rectas son paralelas a la base del triángulo y están a igual distancia una de otra, se concluye que el área sombreada en el paralelógramo es ³⁄₅ del total, es decir, 12 cm².



Finalmente, el área sombreada en el triángulo es 6 cm².

Problema 416. Los 4 nietos del abuelo Anacleto que son menores de 10 años, tienen edades distintas. El abuelo calcula el producto de sus edades y obtiene 2016. ¿Cuál es la edad de cada nieto?

Solución. Notemos que $2016 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 25 \cdot 32 \cdot 7$. Luego, a lo más uno de los nietos tiene $3 \cdot 3 = 9$ años, el siguiente tiene $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ años, el siguiente tiene 7 años y el menor tiene $2 \cdot 2 = 4$ años.

Problema 417. En la representación decimal del número $\frac{391}{37}$. ¿Cuál es la cifra decimal que ocupa el lugar 37º (después de la coma)?

Solución. Notemos que al realizar la división se obtiene el número periódico, $391 \div 37 = 10,\overline{567}$. Notemos que en el periodo el número 7 está en la posición $3k$, el número 6 está en la posición $3k - 1$, y el número 5 está en la posición $3k - 2$, donde $k = 1, 2, 3, \ldots$. Luego, la cifra decimal que ocupa el lugar 37º, donde $37 = 3 \cdot 13 - 2$ es el 5.

Problema 418. La suma de las edades de Tomás y Juan es 23, la suma de las edades de Juan y Alex es 24 y la suma de las edades de Tomás y Alex es 25. ¿Cuál es la edad del mayor de los tres?

Solución. Sean T, J y A, las edades de Tomás, Juan y Alex respectivamente, donde:

$$J + T = 23$$
$$J + A = 24$$

Entonces, $A > T$, es decir, Alex es mayor que Tomás. Además:

$$A + T = 25$$

Y como:

$$A + J = 24$$

Entonces, $T > J$, es decir, Tomás es mayor que Juan, y como Alex es mayor que Tomás, se concluye que Alex es el mayor de los tres.

Sumando las tres ecuaciones se obtiene:

$$2T + 2A + 2J = 72 \Rightarrow T + A + J = 36$$

Como $J + T = 23$, entonces $A = 13$. Como $J + A = 24$, entonces $T = 12$. Como $A + T = 25$, entonces $J = 11$. Luego, Alex es el mayor de los tres y tiene 13 años.

Problema 419. Calcule la suma $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$

Solución.

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} = \frac{100}{1000} + \frac{10}{1000} + \frac{1}{1000} = \frac{111}{1000}$$

Problema 420. La media de 4 números es 9. ¿Cuál es el cuarto número si los otros tres son 5, 9 y 12?

Solución. Si la media de 4 números es 9, entonces los números suman $9 \cdot 4 = 36$, como $5 + 9 + 12 = 26$, se tiene que el cuarto número es el 10.

Problema 421. ¿Cuántos números enteros son mayores que 2015×2017 pero menores que 2016×2016?

Solución. Determinemos los números enteros z de modo que:

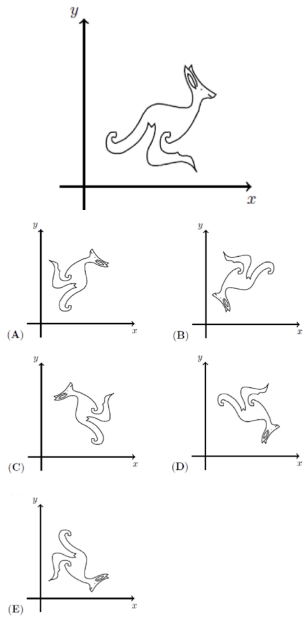
$$2015 \times 2017 < z < 2016 \times 2016$$

Es decir:

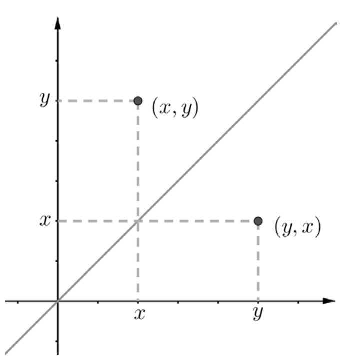
$$\begin{aligned} (2016 - 1) \times (2016 + 1) &< z < 2016 \times 2016 \\ 20162 - 1 &< z < 20162 \end{aligned}$$

Luego, estos números son consecutivos, por lo tanto, no hay números enteros que cumplan dicha condición.

Problema 422. Un conjunto de puntos del plano xy forma la figura de un canguro como se muestra en la imagen, de modo que para cada punto, se intercambian las coordenadas x e y. ¿Cuál es el resultado?



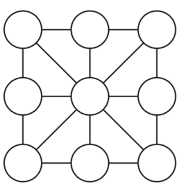
Solución. Notemos que si se intercambian las coordenadas x e y hay simetría con respecto a la recta $y = x$, por lo tanto, en la figura original se debe trazar dicha recta y reflejar los puntos que forman el canguro con respecto a ella, obteniéndose como resultado la figura A.



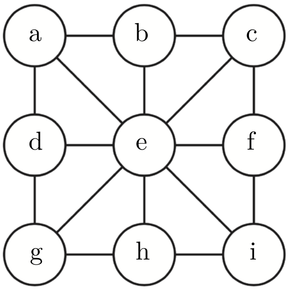
Problema 423. ¿Cuál es el menor número de planos necesarios para limitar una región acotada en el espacio tridimensional?

Solución. 4 planos son suficientes para encerrar una región acotada en el espacio, es decir, una piramide de base triangular.

Problema 424. Diana quiere escribir nueve números enteros en los círculos de la figura de manera que, para los ocho triángulos cuyos vértices se unen por segmentos, las sumas de los números en sus vértices sean iguales. ¿Cuál es el mayor número de enteros distintos que puede usar?



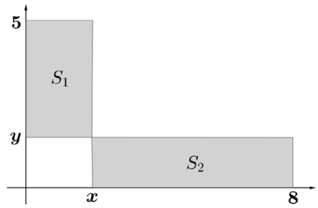
Solución. Notemos que $b = f = d = h$ pues:



- $a + b + e = a + d + e \Rightarrow b = d$
- $c + b + e = c + f + e \Rightarrow b = f$
- $e + f + i = e + h + i \Rightarrow f = h$
- $e + g + h = e + g + d \Rightarrow h = d$

Y como todos los triángulos tienen en común el vertice e, entonces, $a = c = i = g$. Luego, a lo más se pueden usar tres números distintos.

Problema 425. Los rectángulos S_1 y S_2 de la figura tienen la misma área. Determinar el valor de la razón $\frac{x}{y}$.



Solución. Como $S_1 = S_2$ se tiene que:

$$\begin{aligned}(5-y)x &= (8-x)y\\ 5x - xy &= 8y - xy\\ 5x &= 8y\\ \frac{x}{y} &= \frac{8}{5}\end{aligned}$$

Problema 426. Si $x^2 - 4x + 2 = 0$. Calcule el valor de $x + \frac{2}{x}$.

Solución. Notemos que $x = 0$ no es solución de la ecuación, entonces, podemos dividir la ecuación por x, obteniendo:

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + 2 &= 0 \quad / \cdot \frac{1}{x}\\ x - 4 + \frac{2}{x} &= 0\\ x + \frac{2}{x} &= 4\end{aligned}$$

También podemos utilizar la fórmula cuadrática, obteniendo:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

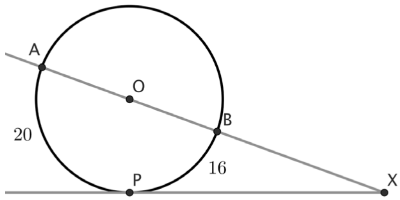
Luego, para x = 2 + $\sqrt{2}$, tenemos:

$$x + \frac{2}{x} = 2 + \sqrt{2} + \frac{2}{2+\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$$

Y para $x = 2 - \sqrt{2}$, tenemos:

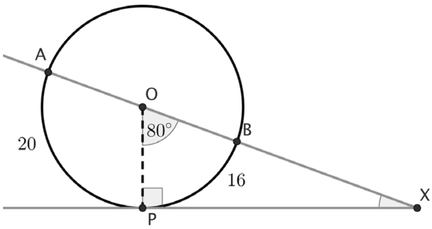
$$x + \frac{2}{x} = 2 - \sqrt{2} + \frac{2}{2-\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} = 4$$

Problema 427. Las longitudes de los arcos AP y PB de la figura son 20 y 16, respectivamente. ¿Cuál es la medida en grados del ángulo $\angle AXP$?



Solución. Notemos que $\widehat{AP} = 20$ y $\widehat{PB} = 16$. Por lo tanto, $\widehat{AB} = 20 + 16 = 36$. Además, el triángulo $\triangle OPX$ es recto en P pues $\overline{XP}$ es tangente a la circunferencia, además podemos encontrar la medida del ángulo $\angle POX$ usando la siguiente proporción entre los arcos y los ángulos centrales:

$$\frac{36}{16} = \frac{180^\circ}{\angle POB} \Rightarrow \angle POB = 80^\circ$$



Finalmente, en el triángulo $\triangle OPX$, se tiene que $\angle AXP = 10^\circ$.

Problema 428. a, b, c y d son enteros positivos tales que

$$a + 2 = b - 2 = 2c = \frac{d}{2}$$

¿Cuál es el mayor de los números a, b, c y d?

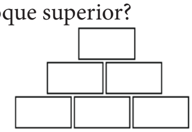
Solución.

(1) $a + 2 = b - 2 \Rightarrow a + 4 = b \Rightarrow a < b$.
(2) $b - 2 = 2c \Rightarrow b = 2c + 2 \Rightarrow b > c$.
(3) $a+2 = 2c$. Como a es positivo y par, cuando $a = 2$ tenemos que $a = c$, cuando $a > 2$ tenemos que $a > c$. Entonces $a \geq c$.

Por (3), a es par, por (1), $a + 4 = b$, entonces $b \geq 6$. Por otra parte, $b - 2 = \frac{d}{2} \Rightarrow d = 2b - 4$. Cuando $b = 6$ tenemos que $d = 8$, cuando $b = 8$ tenemos que $d = 12$. Entonces $d > b$.

Finalmente, el mayor de los números es d.

Problema 429. En esta pirámide de números cada bloque superior es el producto de los dos bloques que tiene debajo. Si los tres números de la fila inferior son números naturales mayores que 1, ¿cuál de los siguientes números no puede aparecer en el bloque superior?



a. 56　**d.** 105
b. 84　**e.** 220
c. 90

Solución. Si los bloques inferiores tienen los números a, b y c, los bloques del centro tienen los números $a \cdot b$ y $b \cdot c$ de modo que el bloque superior contiene el número $a \cdot b \cdot b \cdot c$. Además:

- $56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$
- $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$
- $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
- $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$
- $220 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11$

De estos números el único que no es de la forma $a \cdot b \cdot b \cdot c$ es 105. Luego, 105 no puede estar en el bloque superior.

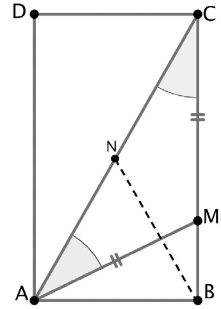
Problema 430. ¿Cuánto vale x_4, si $x_1 = 2$ y $x_{n+1} = x_n^{x_n}$ para n mayor o igual que 1?

Solución.

- $x_1 = 2$
- $x_2 = 2^2$
- $x_3 = \left(2^2\right)^{2^2} = 2^{2 \cdot 2^2} = 2^{2^3}$
- $x_4 = \left(2^{2^3}\right)^{2^{2^3}} = \left(2^{2^3}\right)^{2^8} = 2^{2^3 \cdot 2^8} = 2^{2^{11}}$

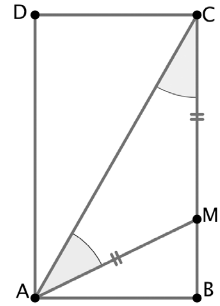
Problema 431. En el rectángulo $ABCD$ la longitud del lado AB es la mitad de la longitud de la diagonal AC. Sea M un punto de BC, tal que $AM = MC$. Determine la medida en grados del ángulo $\angle CAM$.

Solución. Trazamos el segmento desde el vértice B hasta el punto medio N de la diagonal AC. Como AB es la mitad de la longitud de la diagonal AC, entonces, $AN = AB$. Además, BN es la mitad de la diagonal BD, entonces, $BN = AB$. Luego, el triángulo ABN es equilátero, concluyendo que $\angle ABN = 60^\circ$ y su complemento $\angle NBC = 30^\circ$. Finalmente como el triángulo CNB es isósceles de base BC se tiene que $\angle NBC = \angle BCN$ y como el triángulo AMC es isósceles de base AC se tiene que $\angle MCA = \angle CAM = 30°$.



Podemos también resolver el problema utilizando un triángulo rectángulo muy conocido, aquel que tiene el cateto menor igual a la mitad de la hipotenusa, y estos dos lados forman un ángulo agudo de 30° y el otro ángulo de 60°.

En este caso como $AC = 2AB$ y el triángulo ABC es rectángulo en B se tiene que el ángulo $\angle BCA = 30°$ y como el triángulo AMC es isósceles de base AC, se concluye que el ángulo $\angle CAM = 30°$.



Problema 432. Diana corta un rectángulo de área 2016 en 56 cuadrados iguales. Las longitudes de los lados del rectángulo y de los cuadrados son enteros. ¿Para cuántos rectángulos diferentes es posible hacer esto?

Solución. Observemos que $2016 = 56 \cdot 36$. Entonces, los cuadrados iguales son de área $6 \cdot 6 = 36$. Luego, debemos buscar rectángulos de área 2016, tal que los lados del rectángulo sean múltiplos de 6. Como $36 = 6 \cdot 3 \cdot 2$, obtenemos 4 rectángulos de altura 6, $6 \cdot 2$, $6 \cdot 3$, $6 \cdot 2 \cdot 3$, es decir, los rectángulos son aquellos que tienen:

- Altura 6 y base $2 \cdot 3 \cdot 56$.
- Altura $6 \cdot 2$ y base $3 \cdot 56$.
- Altura $6 \cdot 3$ y base $2 \cdot 56$.
- Altura $6 \cdot 2 \cdot 3$ y base 56.

Problema 433. Cada uno de los habitantes de la Isla de los caballeros y escuderos es caballero (que siempre dice la verdad) o escudero (que siempre miente). Durante un viaje a la isla,

Solución. Notemos que es imposible que 3 escuderos esten juntos, pues el escudero del centro estaría diciendo la verdad, de este modo:

- No pueden haber 7 escuderos, pues habrían 7 escuderos juntos.
- No pueden haber 6 escuderos, pues habrían 6 escuderos juntos.

encuentras a 7 personas en torno a una fogata. Los siete te dicen: “Estoy sentado entre dos escuderos”. ¿Cuántos escuderos hay en el grupo?

- No pueden haber 5 escuderos, pues habrían 5 o 4 o 3 escuderos juntos.

C

E E

C E

E C

Observemos que en la fogata si pueden haber 4 escuderos como se muestra en el ejemplo. Notemos que un número menor de escuderos deja dos cabelleros juntos, contradiciendo el hecho de que un caballero siempre dice la verdad.

Problema 434. Las ecuaciones $x^2 + ax + b = 0$ y $x^2 + bx + a = 0$ tienen raíces reales. Se sabe que la suma de los cuadrados de las raíces de la primera ecuación es igual a la suma de los cuadrados de las raíces de la segunda. Si $a \neq b$. ¿Cuál es el valor de $a + b$?

Solución. Sabemos que si x_1 y x_2 son raíces de la ecuación cuadrática $px^2 + qx + r = 0$, entonces $x_1 + x_2 = -\frac{q}{p}$ y $x_1 \cdot x_2 = \frac{r}{p}$. Luego, la suma de los cuadrados de las raíces de la primera ecuación resulta de elevar al cuadrado la igualdad $x_1 + x_2 = -\frac{a}{1}$, obteniendo:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -a \\ (x_1 + x_2)^2 &= (-a)^2 \\ x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 &= a^2 \\ x_1^2 + 2b + x_2^2 &= a^2 \\ x_1^2 + x_2^2 &= a^2 - 2b \end{aligned}$$

Por otra parte, la suma de los cuadrados de las raíces de la segunda ecuación resulta de elevar al cuadrado la igualdad $x_1+x_2 = -\frac{b}{1}$, obteniendo:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -b \\ (x_1 + x_2)^2 &= (-b)^2 \\ x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 &= b^2 \\ x_1^2 + 2a + x_2^2 &= b^2 \\ x_1^2 + x_2^2 &= b^2 - 2a \end{aligned}$$

Como se sabe que la suma de los cuadrados de las raíces de la primera ecuación es igual a la suma de los cuadrados de las raíces de la segunda. Se tiene que:

$$\begin{aligned} a^2 - 2b &= b^2 - 2a \\ a^2 - 2b - b^2 + 2a &= 0 \\ a^2 - b^2 + 2a - 2b &= 0 \\ (a+b)(a-b) + 2(a-b) &= 0 \\ (a-b)(a+b+2) &= 0 \end{aligned}$$

Como $a \neq b$, entonces $a - b \neq 0$. Luego, $a + b + 2 = 0$, obteniendo que $a + b = -2$.

De otro modo podemos obtener las raíces de las ecuaciones usando la fórmula cuadrática, en este caso, las raíces de la primera ecuación son:

$$\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Y las raíces de la segunda ecuación son:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2}$$

Entonces, la suma de los cuadrados de las raíces de la primera ecuación es:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{a^2 - 2a\sqrt{a^2 - 4b} + a^2 - 4b}{4} + \frac{a^2 + 2a\sqrt{a^2 - 4b} + a^2 - 4b}{4} \\ &= \frac{4a^2 - 8b}{4} \\ &= a^2 - 2b \end{aligned}$$

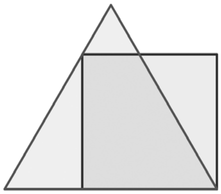
Y la suma de los cuadrados de las raíces de la segunda ecuación es:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{b^2 - 2b\sqrt{b^2 - 4a} + b^2 - 4a}{4} + \frac{b^2 + 2b\sqrt{b^2 - 4a} + b^2 - 4a}{4} \\ &= \frac{4b^2 - 8a}{4} \\ &= b^2 - 2a \end{aligned}$$

Como se sabe que la suma de los cuadrados de las raíces de la primera ecuación es igual a la suma de los cuadrados de las raíces de la segunda:

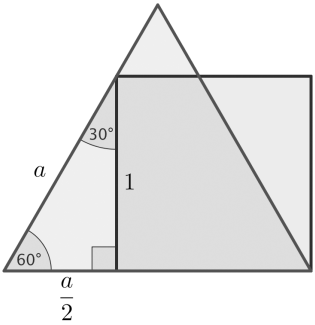
$$\begin{aligned} a^2 - 2b &= b^2 - 2a \\ a^2 - b^2 &= -2a + 2b \\ (a+b)(a-b) &= -2(a-b) \\ a+b &= -2 \end{aligned}$$

Problema 435. Si el perímetro del cuadrado de la figura es 4. Determine el perímetro del triángulo equilátero.



Solución. Si el perímetro del cuadrado es 4, el cuadrado es de lado 1. A la izquierda del cuadrado se genera un triángulo rectángulo de ángulos 30º, 60º y 90º. Si la hipotenusa mide a, el cateto menor mide $\frac{a}{2}$ y el cateto mayor mide $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, como el cateto mayor coincide con el lado del cuadrado, entonces:

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 1 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



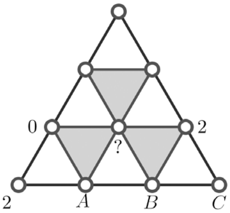
Por lo tanto, el lado el lado del triángulo es:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} + 1 = \frac{\sqrt{3}+3}{3}$$

Finalmente, el perímetro del triángulo es $P = \sqrt{3} + 3$.

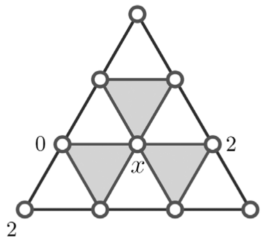
Problema 436. Cada uno de los diez puntos de la figura está marcado con uno de los tres números 0, 1 ´o 2. Se sabe que la suma de los números en los vértices de cualquier triángulo blanco es divisible por 3, mientras que la suma de los números en los vértices de cualquier triángulo negro NO es divisible por 3. En la figura hay marcados tres puntos. ¿Qué números

Solución. En el triángulo blanco, ubicado en la esquina inferior izquierda, el vértice faltante A se debe marcar con el número 1 para que sus vértices sumen 3, concluyendo que $x \neq 2$.



Además, en el triángulo blanco ubicado en la esquina inferior derecha, tenemos 3 opciones:

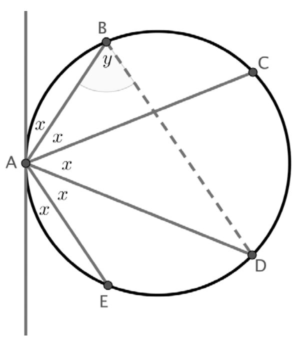
se pueden usar para marcar el punto central?



- $B = 1$ y $C = 0$. Lo cual obliga a que $x = 1$, pues $A + B + x = 3$, pero el valor de x no puede ser 1 porque el triángulo negro superior sumaría 3.
- $B = 0$ y $C = 1$. Lo cual obliga a que $x = 2$, pero $x \neq 2$ por la condición anterior.
- $B = 2$ y $C = 2$. Lo cual obliga a que $x = 0$, sin generar problemas con los triángulos negros.

Por lo que concluimos que $x = 0$.

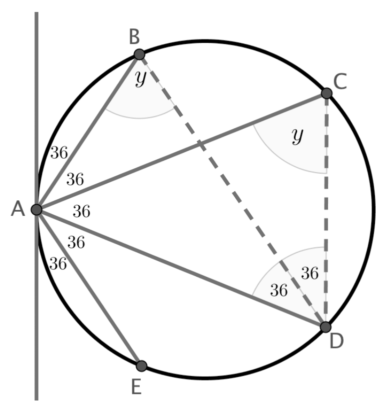
Problema 437. Beatriz dibuja cinco puntos *A, B, C, D* y *E* en una circunferencia y también la tangente a la circunferencia en *A*, como se muestra en la figura, de tal manera que los cinco ángulos marcados con x son iguales (el dibujo no está a escala). ¿Cuál es la medida, en grados, del ángulo $\angle ABD$?



Solución. Como los 5 ángulos son iguales, y los 5 ángulos suman 180º se deduce que $x = 36º$, además los cinco arcos son congruentes. Notemos que:

$$\angle BAC = \angle BDC = \angle ADB = 36º$$

Por la misma razón se tiene que $\angle ACD = \angle ABD = 72º$.



Problema 438. Determine Cuántas soluciones distintas tiene la ecuación:

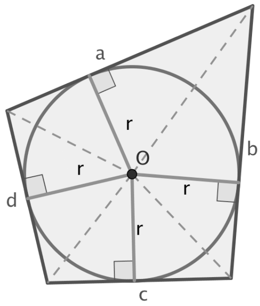
$$(x^2 - 4x + 5)^{x^2+x-30} = 1$$

Solución. Dicha potencia es 1 si, el exponente es 0 y la base es distinta de 0, o bien, si la base es 1. Es decir:

- $x^2+x-30 = (x+6)(x-5) = 0$, es decir, $x = -6$ o $x = 5$, y mientras $x2 -4x+5$ sea distinto de 0 (pues su discriminante es negativo), esta condición siempre se cumple. Por lo tanto, existen dos soluciones para este caso.
- $x^2 - 4x + 5 = 1 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x - 2)2 = 0$, es decir, si $x = 2$.

Concluimos que existen 3 soluciones.

Problema 439. Un cuadrilátero convexo tiene un círculo inscrito (esto es, un círculo tangente a los cuatro lados del cuadrilátero). La razón del perímetro del cuadrilátero al del círculo es 4 : 3. Determine la razón del área del cuadrilátero a la del círculo.



Solución. Sabemos que:

$$\frac{a+b+c+d}{2\pi r} = \frac{4}{3}$$

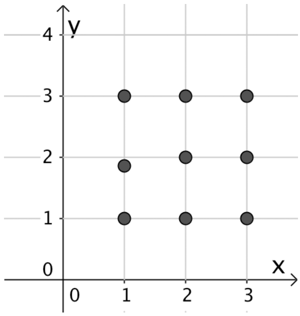
Como la tangente a una circunferencia es perpendicular al radio concluimos que el área del cuadrilátero está dada por la suma de los cuatro triángulos de base a, b, c, d y altura r. Es decir el área del cuadrilatero es:

$$\frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} + \frac{dr}{2}$$

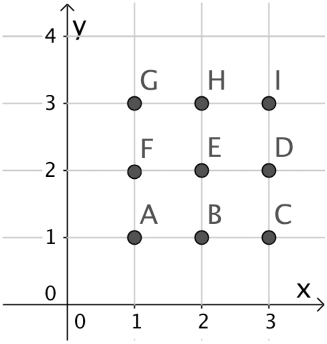
Y el área del círculo es πr^2. Luego, la razón pedida es:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} + \frac{dr}{2}}{\pi r^2} &= \frac{\frac{r}{2}(a+b+c+d)}{\pi r^2}\\ &= \frac{a+b+c+d}{2\pi r}\\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Problema 440. ¿Cuántas funciones cuadráticas en x tienen una gráfica que pasa al menos por tres de los puntos marcados en la figura?



Solución. Notemos que para que sea función, una preimagen no puede tener 2 o más imagenes, es decir, dadas las tres columnas de puntos, la curva debe pasar solo por uno de los puntos de cada columna. Comenzaremos contando todas las conexiones existentes con esta condición. En la primera columna podemos elegir un punto de 3 maneras, en la segunda columna podemos elegir un punto de 3 maneras y en la tercera columna podemos elegir un punto de 3 maneras. luego, podemos trazar $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ conexiones.

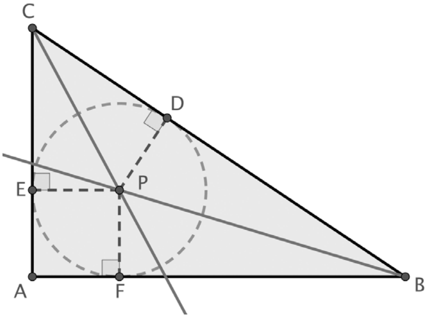


De estas 27 conexiones descartamos los conjuntos de puntos que no pueden pertenecer a una parábola, estos son 5 (*ABC, FED,GHI,AEI,GEC*).

Finalmente existen 22 funciones cuadráticas distintas en x cuya gráfica pasa al menos por tres de los puntos marcados en la figura.

Problema 441. En un triángulo ABC, rectángulo en A, las bisectrices de los ángulos agudos se cortan en un punto P. Si la distancia de P a la hipotenusa es $\sqrt{8}$. ¿Cuál es la distancia desde P al vértice A?

Solución.



Las bisectrices se intersectan en un punto llamado incentro, el cual, es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo, dicha circunferencia inscrita es tangente a los lados del triángulo, es decir, los lados del triángulos son perpendiculares a los radios respectivos de la circunferencia. Luego, el radio mide $\sqrt{8}$.

Por la razón anterior, se concluye que $AEPF$ es un cuadrado de lado $\sqrt{8}$, por lo tanto, AP es su diagonal. Luego, $AP = \sqrt{2}\sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$.

Problema 442. Con las cifras de 1 a 9 (usando cada cifra exactamente una vez) se forman tres números de tres cifras. ¿Cuál de los siguientes NO puede ser la suma de esos tres números?

a. 1500
b. 1503
c. 1512
d. 1521
e. 1575

Solución. Sean $abc,\ def,\ ghi$ los tres números de tres cifras. Notemos que las cifras del 1 al 9 suman 45 y la suma de los dígitos de los tríos a lo menos es 1 + 2 + 3 = 6 y a lo más es 7 + 8 + 9 = 24. Comencemos analizando:

1500. Para que la unidad sea 0 la suma de las unidades puede ser:

(A) 10, entonces, para que la decena sea 0, la suma de las decenas debe ser:

- 9, de ser así, la suma de las centenas debe ser 14. Pero sabemos que 10 + 9 + 4 = 23, no sirve.

- 19, de ser así, la suma de las centenas debe ser 13. Pero sabemos que 10 + 19 + 13 = 42, no sirve.

(B) 20, entonces, para que la decena sea 0, la suma de las decenas debe ser:

- 8, de ser así, la suma de las centenas debe ser 14. Pero sabemos que 20 + 8 + 14 = 42, no sirve.

- 18, de ser así, la suma de las centenas debe ser 13. Pero sabemos que 20 + 18 + 13 = 51, no sirve.

Luego, 1500 NO puede ser la suma de esos tres números.

Podemos ver que:

- 1503 puede ser la suma de los 3 números, cuando la suma de las unidades es 13, la suma de las decenas es 19 y la suma de las centenas es 13 pues $13 + 19 + 13 = 45$.

- 1512 puede ser la suma de los 3 números, cuando la suma de las unidades es 12, la suma de las decenas es 20 y la suma de las centenas es 13 pues $12 + 20 + 13 = 45$.

- 1521 puede ser la suma de los 3 números, cuando la suma de las unidades es 11, la suma de las decenas es 21 y la suma de las centenas es 13 pues $11 + 21 + 13 = 45$.

- 1575 puede ser la suma de los 3 números, cuando la suma de las unidades es 15, la suma de las decenas es 16 y la suma de las centenas es 14 pues $15 + 16 + 14 = 45$.

Una solución alternativa consiste en expresar los números abc, def, ghi, en su forma decimal:

- $abc = 100a + 10b + c$

- $def = 100d + 10e + f$

- $ghi = 100g + 10h + i$

Tal que, la suma de los tres números es:

$$abc + def + ghi = 100(a + d + g) + 10(b + e + h) + (c + f + i)$$

Notemos que dicha suma es divisible por 9, pues:

$$100\,(a + d + g) + 10(b + e + h) + (c + f + i)$$

$$= 99\,(a + d + g) + 9\,(b + e + h) + (a + b + c + d + e + f + g + h + i)$$

$$= 99\,(a + d + g) + 9(b + e + h) + 45$$

$$= 9\,[11(a + d + g) + (b + e + h) + 5]$$

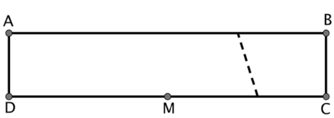
Luego, la suma de los tres numeros es siempre divisible por 9. Como 1500 no es divisible por 9, 1500 no puede ser la suma de los tres números.

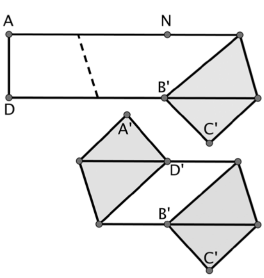
Problema 443. Un cubo se descompone en 6 pirámides de base cuadrada, uniendo un punto interior con cada uno de los vértices del cubo. Los volúmenes de cinco de esas pirámides son 2, 5, 10, 11 y 14. ¿Cuál es el volumen de la sexta pirámide?

Solución. La suma de los volúmenes de dos pirámides con bases en caras opuestas del cubo es constante, pues la suma de las alturas de dichas pirámides es igual a la medida del lado del cubo.

Luego, $2 + 14 = 16$, $5 + 11 = 16$, $10 + x = 16$. Por lo tanto, el volumen de la sexta pirámide es 6.

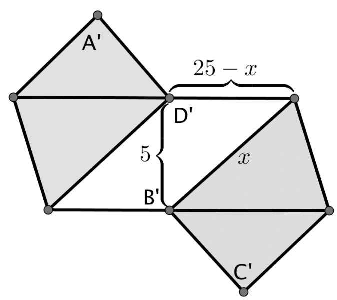
Problema 444. La tira rectangular *ABCD* de 5 cm de ancho y 50 cm de largo es gris por un lado y blanca por otro. Doblando la tira, Cristina hace coincidir el vértice *B* con el punto medio *M* del lado *CD*. Doblándola otra vez, el vértice *D* coincide con el punto medio *N* del lado *AB*. ¿Cuál es el área, en cm², de la parte visible blanca de la última figura?





Solución. Si el primer doblez se realiza a *x* unidades del punto *B*, en el centro se forma un triángulo rectángulo de catetos $25 - x$, 5 e hipotenusa *x*. Por lo tanto, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} (25 - x)^2 + 5^2 &= x^2 \\ 625 - 50x + x^2 + 25 &= x^2 \\ 650 &= 50x \\ 13 &= x \end{aligned}$$



Obteniendo que $25 - x = 25 - 13 = 12$. Luego, la parte blanca de la figura es un paralelogramo de base 12 cm y altura 5 cm. Finalmente, el área de la parte visible blanca es $12 \cdot 5 = 60$ cm².

Problema 445. Ana elige un entero positivo *n* y escribe la suma de todos los enteros positivos desde 1 hasta *n*. Un número primo *p* divide a la suma, pero no divide a ninguno de los sumandos. ¿Cuál de los siguientes números puede ser $n + p$?

a. 217
b. 221
c. 229
d. 245
e. 269

Solución. Sabemos que la suma desde 1 hasta *n* es:

$$S = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Notemos que si *n* es par, la suma es divisible por $n+1$, y si $n+1$ es par la suma es divisible por *n*.

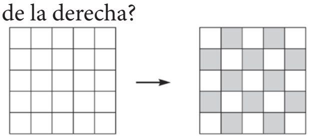
Sabemos que $p > n$, pues *p* no divide a ninguno de los sumandos. Además, si *p* divide a la suma, y *p* es más grande que todos los sumandos, concluimos que *n* es par y *p* debe ser $n + 1$.

Observemos que:

- $217 = 108 + 109$, siendo 109 un número primo que divide a $\dfrac{108 \cdot 109}{2}$. Luego, 217 puede ser $n + p$.
- $221 = 110 + 111$, pero $111 = 3 \cdot 37$. Luego, no es primo.
- $229 = 114 + 115$, pero $115 = 5 \cdot 23$. Luego, no es primo.
- $245 = 122 + 123$, pero $123 = 3 \cdot 41$. Luego, no es primo.
- $269 = 134 + 135$, pero $135 = 33 \cdot 5$. Luego, no es primo.

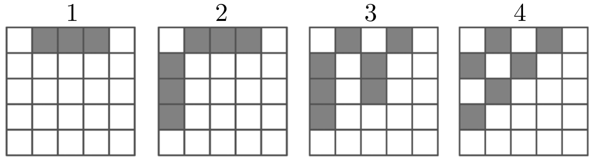
Finalmente, solo 217 puede ser $n + p$.

Problema 446. Se considera un cuadrado de 5×5 dividido en 25 casillas. Inicialmente todas las casillas son blancas, como se muestra en la figura. Se llamarán casillas vecinas aquellas que comparten un lado. Cuando la pieza mágica de triminó del abuelo Anacleto se ubica sobre tres casillas consecutivas, misteriosamente estas casillas cambian sus colores al color opuesto (las blancas se hacen negras y las negras se hacen blancas). ¿Cuál es el número mínimo de veces que se debe poner esta pieza para obtener el ajedrezado aspecto de la figura de la derecha?



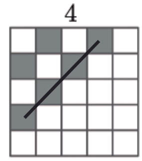
Solución. Observemos que poniendo la pieza mágica 4 veces podemos cubrir con el aspecto ajedrezado la mitad del tablero. Luego, por simetría se debe poner la pieza 4 veces más, en total 8 veces.

1 2 3 4



Notemos que el triminó solo se puede colocar de manera horizontal o vertical en el tablero. Luego, para obtener las cuatro casillas negras de la diagonal marcada en el paso 4, se deben ocupar necesariamente 4 fichas de triminó, no menos.

4



Problema 447. El entero positivo N tiene exactamente seis divisores positivos distintos, incluyendo a 1 y a N. El producto de cinco de ellos es 648. ¿Cuál es el sexto divisor de N?

Solución. Si un número tiene exactamente $6 = 2 \cdot 3$ divisores positivos distintos, este número es de la forma $a^1 \cdot b^2$, cuyos divisores son $1, a, b, a \cdot b, b^2, a \cdot b^2$, de estos 6 números, el producto de 5 de ellos es 648.

Por otra parte, $648 = 2^3 \cdot 3^4 = (2)\cdot(3)\cdot(2\cdot3)\cdot(2\cdot3^2)$. Como los 6 divisores del número N son $1, a, b, a \cdot b, b^2, a \cdot b^2$. Concluimos que $a = 2$, $b = 3$ y los 6 divisores son $1, 2, 3, 2 \cdot 3, 3^2, 2 \cdot 3^2$. Por lo tanto, el sexto divisor de N, que no aparece en el producto $(1) \cdot (2) \cdot (3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 32) = 648$ es $3^2 = 9$.

Problema 448. Si a, b, c, d son reales positivos y cumplen que $a + 5 = b^2 - 1 = c^2 + 3 = d - 4$. ¿Cuál de los cuatro números a, b, c, d es el mayor?

Solución.

- Si $a + 5 = d - 4 \Rightarrow a = d - 9$, es decir, $d > a$.
- Si $b^2 - 1 = c^2 + 3 \Rightarrow b^2 = c^2 + 4$, es decir, $b > c$.
- Si $b^2 - 1 = d - 4 \Rightarrow b^2 + 3 = d$, es decir $d > b$

Luego d es el mayor.

Problema 449. En una granja de Temuco, cada vaca tiene dos patas más que cada pato. Si contamos el total de patas de todas las vacas de la granja, habrán 2 patas menos que el total de patas de los patos. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a. La granja tiene menos de la mitad de vacas que de patos.
b. La granja tiene la mitad de vacas que de patos.
c. La granja tiene el mismo número de vacas que de patos.
d. La granja tiene el doble de vacas que de patos.
e. La granja tiene más del doble de vacas que de patos.

Solución. Llamaremos v a la cantidad de Vacas y p a la cantidad de Patos. Se sabe que cada Vaca tiene 4 patas y cada pato tiene 2 patas. Por lo tanto, se tiene la siguiente relación:

$$\begin{aligned} 4v &= 2p - 2 \\ 2v &= p - 1 \\ 2v + 1 &= p \end{aligned}$$

La expresión anterior indica que la cantidad de patos es mayor al doble de la cantidad de vacas.

De otra forma, es posible considerar que $v = \frac{p}{2} - 1$. Esto quiere decir que, la cantidad de Vacas es menos de la mitad que la cantidad de patos, siendo la alternativa (A) la correcta.

Problema 450. En una competencia deportiva hay n equipos enumerados desde 1 a n, tal que cada equipo juega sola una vez con los equipos restantes. El equipo que gana obtiene 1 punto, mientras que el equipo que pierde obtiene −1 punto. En caso de empate, ambos obtienen 0 puntos. Si el puntaje final del equipo k es $(10-2k)$ puntos, donde $k = 1, 2, \ldots, n$. ¿Cuál es el número de equipos que participaron en la competencia deportiva?

Solución. Notemos que si sumamos los puntajes de todos los equipos, el total debe ser igual a cero, pues cuando gana un equipo, este obtiene 1 punto y en consecuencia, el equipo perdedor obtiene −1 punto. Luego, si el primer equipo obtuvo 8 puntos, el último equipo obtuvo −8 puntos.

Para que el equipo 1 haya obtenido 8 puntos, como mínimo debiesen haber jugado en la competencia deportiva 9 equipos. De manera que si este le ganó a todos los equipos restantes, se obtiene el puntaje anterior. A continuación, el equipo 2 que obtuvo 6 puntos, tuvo que haber ganado 7 de 8 partidos, pues perdió con el equipo 1, y por tanto obtuvo $7 + (-1) = 6$ puntos.

Para verificar que son 9 equipos, construyamos una tabla que represente los partidos Ganados y Perdidos por cada equipo y los puntajes obtenidos.

Equipo	Partidos ganados	Partidos perdidos	Puntaje	Resultado
E1	8	0	$8 \cdot 1 - 0 \cdot 1$	8
E2	7	1	$7 \cdot 1 - 1 \cdot 1$	6
E3	6	2	$6 \cdot 1 - 2 \cdot 1$	4
E4	5	3	$5 \cdot 1 - 3 \cdot 1$	2
E5	4	4	$4 \cdot 1 - 4 \cdot 1$	0
E6	3	5	$3 \cdot 1 - 5 \cdot 1$	-2
E7	2	6	$2 \cdot 1 - 6 \cdot 1$	-4
E8	1	7	$1 \cdot 1 - 7 \cdot 1$	-6
E9	0	8	$0 \cdot 1 - 8 \cdot 1$	-8

Finalmente, se corrobora que la cantidad de equipos que jugaron son en total 9.

Problema 451. ¿De cuántas maneras es posible formar un segmento de 100 cm de longitud empleando segmentos de 7 y 12 cm?

Solución. Si queremos conseguir 100 cm empleando segmentos de 7 y 12 cm, basta expresar 100 como suma de múltiplos de 7 y 12:

- $100 = 12 + 88$, pero 88 no es múltiplo de 7. Luego, esta combinación no sirve.

- $100 = 12 \cdot 2 + 76$, pero 76 no es múltiplo de 7. Luego, esta combinación no sirve.

- $100 = 12 \cdot 3 + 64$, pero 64 no es múltiplo de 7. Luego, esta combinación no sirve.

- $100 = 12 \cdot 4 + 52$, pero 52 no es múltiplo de 7. Luego, esta combinación no sirve.

- $100 = 12 \cdot 5 + 40$, pero 40 no es múltiplo de 7. Luego, esta combinación no sirve.

- $100 = 12 \cdot 6 + 28 = 12 \cdot 6 + 7 \cdot 4$. Luego, esta combinación sirve.

- $100 = 12 \cdot 7 + 16$, pero 16 no es múltiplo de 7. Luego, esta combinación no sirve.

- $100 = 12 \cdot 8 + 4$, pero 4 no es múltiplo de 7. Luego, esta combinación no sirve.

Finalmente, hay solo una combinación posible.

Problema 452. Determine entre que números enteros se encuentra el número:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{2013\cdot 2015}$$

Solución. Notemos que cada una de las fracciones puede ser expresada como:

$$\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)$$
$$\frac{1}{3\cdot 5}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$
$$\frac{1}{5\cdot 7}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$$
$$\ldots$$
$$\frac{1}{2013\cdot 2015}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2013}-\frac{1}{2015}\right)$$

Luego, la suma correspondiente puede ser expresada como:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{2013\cdot 2015}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2013}-\frac{1}{2015}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2011}-\frac{1}{2013}+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2015}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2015}\right)$$
$$=\frac{1007}{2015}$$
$$\approx 0{,}5$$

Por lo tanto, la suma pedida se encuentra entre 1 y 2.

Problema 453. Determina una secuencia $a_1, a_2, a_3 \ldots$, con la siguiente propiedad: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, donde a_n es un entero positivo para todo n. Si $a_7 = 2016$. ¿Cuántas secuencias numéricas cumplen estas condiciones?

Solución. Notemos que:

$$a_3 = a_2 + a_1$$
$$a_4 = a_3 + a_2 = 2a_2 + a_1$$
$$a_5 = a_4 + a_3 = 2a_2 + a_1 + a_2 + a_1 = 3a_2 + 2a_1$$
$$a_6 = a_5 + a_4 = 3a_2 + 2a_1 + 2a_2 + a_1 = 5a_2 + 3a_1$$
$$a_7 = a_6 + a_5 = 5a_2 + 3a_1 + 3a_2 + 2a_1 = 8a_2 + 5a_1$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$a_7 = 8a_2 + 5a_1 = 2016$$

Si queremos hallar la cantidad de formas de escribir 2016 en términos de a_2 y a_1, debemos hallar todas las combinaciones que cumplen la igualdad anterior. Se puede notar que:

$$8\cdot 2 + 5\cdot(-3) = 1$$

Al multiplicar la igualdad anterior por 2016, se obtiene:

$$8 \cdot 4032 + 5 \cdot (-6048) = 2016$$

Un caso particular para a_2 y a_1 son 4032 y −6048, respectivamente. En general, se tiene que:

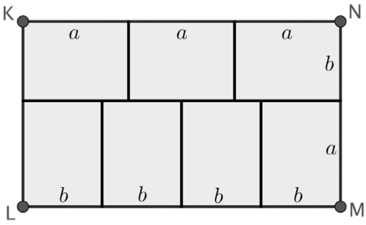
$$a_2 = 4032 + 5t;\ t \in \mathbb{Z}$$
$$a_1 = -6048 - 8t;\ t \in \mathbb{Z}$$

Como ambos, a_2 y a_1, deben ser enteros positivos, tenemos que:

$$4032 + 5t > 0 \Rightarrow t > -806{,}4$$
$$-6048 - 8t > 0 \Rightarrow t < -756$$

Luego $-806{,}4 < t < -756$, es decir, t considera valores desde -805 hasta -754. Finalmente existen 50 combinaciones.

Problema 454. El rectángulo *KLMN* está compuesto por 7 pequeños rectángulos iguales. El perímetro de cada uno de los rectángulos pequeños es 28. ¿Cuál es el área del rectángulo *KLMN*?



Solución. Como cada rectángulo tiene perímetro 28 y sus lados son a y b, entonces:

$$2a + 2b = 28$$

Notemos que dos lados opuestos en un paralelogramo son de igual longitud, es decir, son congruentes. Luego, en el rectángulo *KLMN*, se tiene que $KN = LM$, lo que significa que:

$$3a = 4b$$

Al multiplicar la primera ecuación por 2, obtenemos que:

$$4a + 4b = 56$$

Y como $3a = 4b$ concluimos que:

$$\begin{aligned} 4a + 3a &= 56 \\ 7a &= 56 \\ a &= 8 \end{aligned}$$

Si $a = 8$, entonces $b = 6$. Luego, el área de *KLMN* está dado por:

$$3a \cdot (a + b) = 3 \cdot 8 \cdot (8 + 6) = 24 \cdot 14 = 336$$

Otra forma hubiese sido tomar:

$$4b \cdot (a + b) = 4 \cdot 6 \cdot (8 + 6) = 24 \cdot 14 = 336$$

Problema 455. Tenemos una fila con 4 números consecutivos. El producto del segundo y tercer número, difiere en 2 unidades, del producto del primer y último número de esta fila. ¿Cuántas filas de 4 números consecutivos cumplen esta condición?

Solución. Consideremos n, $n+1$, $n+2$ y $n+3$; donde $n \in \mathbb{Z}$, los números de la fila. Como el producto del segundo y tercer número, difiere en 2 unidades, del producto del primer y último número de esta fila se tiene que:

$$\begin{aligned} n \cdot (n+3) + 2 &= (n+1) \cdot (n+2) \\ n^2 + 3n + 2 &= n^2 + 3n + 2 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Como la ecuación anterior tiene infinitas soluciones, concluimos que 4 números enteros consecutivos siempre cumplen dicha condición.

Problema 456. En la compañía Juventud, el promedio de edad de 9 trabajadores es 25 años. En la compañía Venerable, el promedio de edad es de 45 años. Si las compañías se fusionan y nadie es despedido, el promedio de edad es 36 años. ¿Cuántos trabajadores tienen la compañía Venerable?

Solución. Sea x_m el m-ésimo trabajador de Juventud, como el promedio de edad de 9 trabajadores es 25 años, se tiene que:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_9}{9} = 25$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_9 = 25 \cdot 9$$

Sea y_n al n-ésimo trabajador de Venerable, el promedio de edad de los trabajadores es de 45 años, se tiene que:

$$\frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} = 45$$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 45 \cdot n$$

Como al fusionar las empresas se obtiene que el promedio de edad es 36 años, se tene que:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_9 + y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n+9} = 36$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_9 + y_1 + y_2 + \ldots + y_n &= 36 \cdot (n+9) \\ 25 \cdot 9 + 45n &= 36n + 36 \cdot 9 \\ 9n &= (36 - 25) \cdot 9 \\ n &= 11 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la empresa Venerable tiene 11 trabajadores.

Problema 457. Sea $f(n)$ la suma de los dígitos del entero positivo n. Por ejemplo, $f(2016) = 2 + 0 + 1 + 6 = 9$ y $f(7) = 7$. Si $n < 1000$, ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(f(n)) = 10$?

Solución. Notemos que la mayor suma de dígitos, según la función $f(n)$, estará dada parar $n = 999$, siendo en este caso la suma igual a 27.

Como $f(f(n)) = 10$, debemos hallar un número menor o igual a 27 tal que la suma de sus dígitos es 10. Concluyendo que 19 es el único que satisface ambas condiciones. Se deduce que $f(n) = 19$. Luego, debemos hallar todos los números menores a 1000 que satisfacen la condición, en donde la suma de sus dígitos es 19.

Notemos que el número con dos dígitos de mayor suma será 99, siendo esta igual a 18. Por lo tanto, los números buscados son números de 3 dígitos.

- Cuando la cifra de las centenas es 1, existe un único caso; considerar decena 9 y unidad 9.
- Cuando la cifra de las centenas es 2, existen dos casos; considerar decena 8 y unidad 9 o bien, decena 9 y unidad 8.
- Cuando la cifra de las centenas es 3, existen tres casos; considerar decena 7 y unidad 9, decena 8 y unidad 8 o bien, decena 9 y unidad 7.

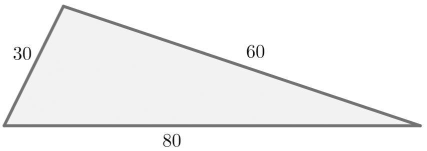
Observemos que el número de casos depende de la cifra de las centenas, concluyendo que cuando la cifra de las centenas es n, existen n casos. Por lo tanto, como las cifras de las centenas están entre 1 y 9, se concluye que existen $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$ números de tres dígitos en que la suma de sus dígitos es igual a 18.

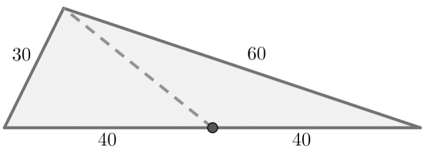
Finalmente, se concluye que la ecuación $f(f(n)) = 10$ tiene 45 soluciones distintas.

CAPÍTULO III

PROPUESTOS

Propuesto 1. Antonia y Basilio quieren repartirse un pedazo de pizza de forma triangular. Siempre que tratan de ver donde realizar un corte para dividirla, alguno de ellos piensa que uno de los dos trozos es mayor que el otro. Deciden medir los lados de la pizza: 80, 60 y 30 centímetros.





El abuelo Anacleto, matemático jubilado y aventurero, pasaba por ahí y ve a Basilio y Antonia discutiendo. Midió un lado para determinar su punto medio y realizó el corte como muestra la figura.

Antonia y Basilio no están del todo convencidos que con este corte los dos trozos resultantes tengan la misma cantidad de pizza. ¿Es justo el corte propuesto por el abuelo Anacleto? Si estás de acuerdo, debes dar un argumento que convenza completamente a Antonia y Basilio. Si no estás de acuerdo, debes proponer otra manera de cortar la pizza y convencerlos de que divide a la pizza en dos trozos de igual tamaño.

Propuesto 2. Considerar un triángulo $\triangle ABC$ equilátero de altura 12. Hallar la posición de un punto M en el interior del triángulo tal que las áreas de los triángulos $\triangle ABM$, $\triangle BCM$ y $\triangle CAM$ estén en razón 1 : 2 : 3.

Propuesto 3. Dado un triángulo $\triangle ABC$, rectángulo en B. Sea M un punto sobre la hipotenusa tal que $BM = AB$, y sea N un punto en el cateto BC tal que $MN = MB$. Sabiendo que $\angle NMC = 30^\circ$. Calcule la medida del $\angle BAC$.

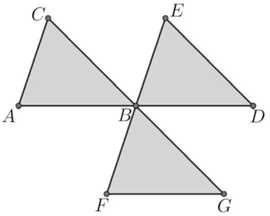
Propuesto 4. Las áreas de tres cuadrados están en la razón 9 : 16 : 25. Si la diferencia entre el perímetro del mayor cuadrado y perímetro del menor cuadrado es 16. Calcule la medida del lado de cada uno de los cuadrados.

Propuesto 5. Dado un cuadrado $ABCD$ y un punto E sobre el lado AB. Sobre el segmento BE se construye el cuadrado $BEFG$, hacia el exterior del cuadrado original. Si $\angle BAG = 40^\circ$. Calcule la medida del $\angle BDF$.

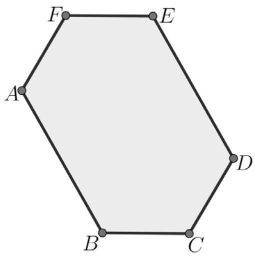
Propuesto 6. Un cuadrilátero $ABCD$ es tal que $AB = BC = 1$, la medida de la diagonal AC es un número entero, y sus diagonales son perpendiculares. Además, los cuatro vértices del cuadrilátero están sobre una misma circunferencia. Determinar el perímetro de $ABCD$.

Propuesto 7. Dos hermanos heredan un terreno de 12 hectáreas que tiene la forma de un triángulo escaleno. Dice el testamento: Deben unirse los puntos medios de dos de los lados que demarcan el terreno, lo que lo divide en un terreno triangular y en otro terreno en forma de cuadrilátero. El terreno triangular será para Benjamín, el hermano menor, y la otra parte para Ciro, el mayor. ¿Cuántas hectáreas de terreno tocan cada uno?

Propuesto 8. La siguiente figura, en forma de trebol, se construyó haciendo tres copias de un triángulo escaleno $\triangle ABC$. Primero, se extiende el lado AB hasta un punto D de manera que $BD = AB$ y el $\triangle BDE$ es congruente con el $\triangle ABC$. Después se extiende CB hasta un punto G con $BG = CB$ y se extiende EB hasta un punto F con $BF = EB$, de manera que el $\triangle FGB$ es congruente con el $\triangle ABC$. Calcula el el valor de la suma de los ángulos $\angle CBE + \angle DBG + \angle ABF$.



Propuesto 9. En el hexágono de la figura, sus seis ángulos son iguales y $AF = FE = BC = CD = 1$, $AB = ED = 2$. Determine el área de $ABCDEF$



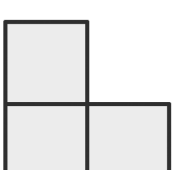
Propuesto 10. Considerar un $\triangle ABC$ con $\angle ACB = \angle ABD$, donde D es un punto en el lado AC tal que $AD = 4$ y $DC = 5$. Determinar la longitud de AB.

Propuesto 11. Considerar un $\triangle ABC$ con $\angle BAC = 120^{\circ}$. $AB = 4$ y $AC = 12$. Sea AD la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ con D sobre el lado BC. Determinar la longitud de AD.

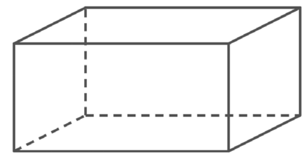
Propuesto 12. Considerar un $\triangle ABC$ con $\angle ABC = 60^{\circ}$ y $AB = 5$. Con centro en el punto medio de AB se traza una circunferencia de radio $5/2$, que corta a BC en un punto D 6= B y a AC en un punto E 6= A. Determinar la longitud de AD.

Propuesto 13. Los ángulos de un pentágono (cinco lados) son números enteros consecutivos. Determinar las medidas de estos cinco ángulos.

Propuesto 14. Un triminó **L** está conformado por tres cuadrados, colocados como en la figura. Determina si se puede subdividir el triminó en exactamente 4 partes congruentes (dos figuras son congruentes si tienen la misma forma y el mismo tamaño).

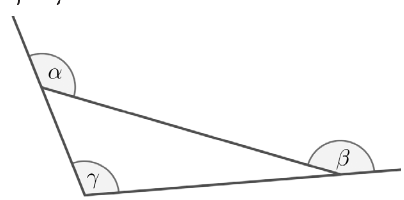


Propuesto 15. Usando 42 bloques en forma de cubo de lado 1 cm, la pequeña Anastasia formó un sólido rectangular parecido al de la figura. Si el perímetro del rectángulo que se forma en la base del sólido es 18 cm, determinar su altura.



Propuesto 16. Hay muchos triángulos cuya área es 7. Por ejemplo, hay triángulos equiláteros de área 7, triángulos rectángulos de área 7, escalenos, etc. Considerar un $\triangle ABC$ de área 7. Sean D un punto en $\overline{AB}$ tal que $BD = \frac{1}{3}AB$ y E el punto medio de $\overline{AC}$. Calcule cuál es el área de $BDEC$.

Propuesto 17. Dado el triángulo de la figura, determine el valor (en grados) que resulta de sumar las medidas de los ángulo α y β, y al resultado restarle la medida del ángulo γ, es decir, $\alpha + \beta - \gamma$.



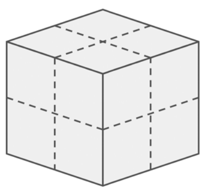
Propuesto 18. En el patio de la casa del abuelo Anacleto hay demarcado un triángulo equilátero cuyos lados miden 3 metros. Le entrega a su nieto Gerardo diez estacas y un martillo. " debes clavar tus estacas dentro del triángulo lo más separadas posibles" le dice "si yo descubro un par entre tus 10 estacas cuya distancia sea 1 metro o menos, yo gano". Gerardo lo intenta varias veces, pero al abuelo siempre le gana descubriendo un par de estacas a un metro o menos de distancia. ¿Puede ganar el juego Gerardo?

Propuesto 19. Algunos triángulos isósceles tienen una curiosa propiedad: su área es el triple de la longitud de sus lados iguales. Por ejemplo, si un triángulo $\triangle ABC$ con $AC = 2 = BC$ tiene esta propiedad, entonces su área es 6 (triple de 2), y si fuera $AC = 3 = BC$, entonces su área es 9 (triple de 3). Llamaremos a los triángulos isósceles con esta propiedad triángulos isósceles triplicadores.

El abuelo Anacleto, matemático jubilado y aventurero, siempre estuvo interesado en los triángulos isósceles triplicadores, pues dice que sus misteriosas propiedades llevan a profundos secretos. Revisando los escritos del abuelo, su nieto Esteban leyó lo siguiente: "…tenemos un triángulo isósceles triplicador cualquiera $\triangle ABC$. Se elige al azar un punto X sobre la base $\overline{AB}$ y se trazan los puntos P sobre $\overline{AC}$ y Q sobre $\overline{BC}$ tales que $\overline{XP}$ es perpendicular a $\overline{AC}$ y $\overline{XQ}$ es perpendicular a $\overline{BC}$… ¡oh, pero que misterios encierran estos triángulos! …no importa donde se ubique el punto X, el valor de la suma $XP + XQ$ siempre es el mismo número... y este número me entrega la clave de…"

Esteban quedó intrigado al ver estas notas y se pregunta ¿cómo descubri ó el abuelo que $XP + XQ$ siempre da el mismo valor? y ¿cuál será ese valor? Tu problema es responder ambas preguntas.

Propuesto 20. Cada una de las caras de un cubo se divide en 4 cuadrados. Los 24 cuadrados resultantes se pintan de color Azul, Blanco o Café, de manera que no puede haber dos cuadrados que tengan un lado común pintados del mismo color. Bajo estas condiciones, ¿pueden pintarse nueve de los cuadrados de un mismo color?



Propuesto 21. En el plano se trazan seis rectas de manera que cualquier par de ellas se corta exactamente en un punto, y no hay tres que pasen por un mismo punto. Determine la cantidad de regiones en que estas rectas dividen al plano.

Propuesto 22. Las longitudes de los tres lados de un triángulo son números enteros. El área del triángulo también es un número entero. Un lado del triángulo mide 21, y el perímetro del triángulo es 48. Determine las longitudes de los otros dos lados del triángulo.

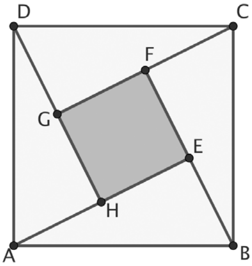
Propuesto 23. Los lados del triángulo equilátero $\triangle ABC$ miden 12 cada uno. D es un punto en BC tal que AD es perpendicular a BC. Si E es el punto medio de AD, calcule la medida de BE.

Propuesto 24. El área de un paralelogramo $ABCD$ es igual a 10. Sean M,N los puntos medios de los lados AD y BC, respectivamente. Encuentre el área del cuadrilátero $MBND$.

Propuesto 25. El $\triangle ABD$ es rectángulo en B. C es un punto sobre AD tal que $AC = CD$ y $AB = BC$. Determine la medida del $\angle DAB$.

Propuesto 26. Un cuadrado y un triángulo equilátero tienen el mismo perímetro. El área del triángulo es $9\sqrt{3}$. Determine la longitud de la diagonal del cuadrado.

Propuesto 27. En el diagrama, $ABCD$ es un cuadrado de lado 17 y los triángulos AHD,-BEA,CFB y DGC son rectángulos y congruentes. Sabiendo que $BE = 8$. Calcule el área del cuadrilátero $EFGH$.



Propuesto 28. Se apoya en una pared vertical una escalera de 25 metros de largo. El pie de la escalera está a 7 metros de la pared. Si la parte superior de la escalera se desliza 4 metros hacia abajo, determinar la cantidad de metros que se desliza el pie de la escala.

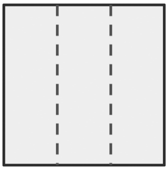
Propuesto 29. Considerar un $\triangle ABC$ con $\angle ABC = 35°$ y $\angle BCA = 28°$. Por el punto A se traza una recta k, paralela a BC. La recta perpendicular al punto medio de AC intersecta a k en un punto D, y la perpendicular al punto medio de AB intersecta a k en E. Determinar las medidas de los cuatro ángulos interiores del cuadrilátero $BCDE$.

Propuesto 30. Tienes una tira de papel que mide exactamente ⅔ de metro. No tiene ninguna marca y no se dispone de ninguna herramienta para medir. Debes medir exactamente medio metro usando la tira de papel. ¿Cómo hacerlo?

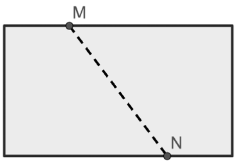
Propuesto 31. Sea $ABCDE$ un pentágono tal que $\angle BCD = 74°$, $\angle CDE = 116°$ y $\angle DEA = 85°$. Las bisectrices de los ángulos en los vértices A y B se cortan en un punto P. Determinar la medida del $\angle APB$.

Propuesto 32. Una diagonal de un polígono es una recta que une dos vértices no adyacentes. Un "decágono" tiene 10 vértices. ¿Cuántas diagonales tiene un decágono?

Propuesto 33. El cuadrado de la figura se divide en 3 rectángulos congruentes. Si el perímetro de cada uno de los rectángulos es 24, calcule el perímetro del cuadrado.



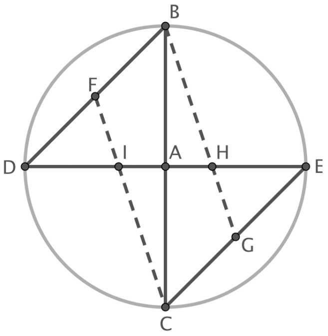
Propuesto 34. El segmento de recta MN determina dos regiones en el rectángulo de la figura. ¿Cuál es el mayor número de regiones que pueden determinarse en el rectángulo trazando 4 segmentos de recta?



Propuesto 35. Dado un triángulo escaleno $\triangle ABC$. Sean M,N puntos en el interior del triángulo tales que $\angle CAM = \angle MAN = \angle NAB$ y $\angle ACM = \angle MCN = \angle NCB$. Demostrar que MN es bisectriz del $\angle ANC$.

Propuesto 36. Dado un cuadrado $ABCD$ cuyos lados miden 1. Sean E y F los puntos medios de los lados BC y CD, respectivamente. Trazar los segmentos AF,BF y AE. Sea G el punto de intersección entre AE y BF. Determinar el área del $\triangle AGF$.

Propuesto 37. Dada una circunferencia de centro A y radio 3. Se trazan dos diámetros perpendiculares, BC y DE. Sean F y G los puntos medios de BD y CE, respectivamente. Sean H e I los puntos de intersección de BG y FC con DE. Calcule la medida del segmento HI.



Propuesto 38. Considerar un paralelogramo $DEFG$. Sea C un punto en el lado FG. Sea AB un segmento que contiene al punto E tal que $DCBA$ es un paralelogramo. Si el área de $DEFG$ es 20, determinar el área de $DCBA$.

Propuesto 39. Considerar un $\triangle ABC$, rectángulo en B. Sobre la hipotenusa AC se construye un cuadrado de lado AC, hacia el exterior del triángulo. Sea P el centro del cuadrado. Determinar la medida del $\angle ABP$.

Propuesto 40. Considerar un cuadrilátero $ABCD$ tal que $AB = CD$. Asumir que $\angle ACB + \angle DAC = 180°$ y que $\angle ADC = 75°$. Determinar la medida del $\angle ABC$.

Propuesto 41. Considerar un cuadrilátero $ABCD$. Sean P y Q puntos en AB y en CD, respectivamente. Asumir que existe una circunferencia que contiene los puntos P,Q,B y C, y otra que contiene los puntos P,Q,A y D. ¿Es verdad que necesariamente $ABCD$ es un paralelogramo?

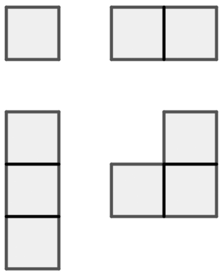
Propuesto 42. Considerar un triángulo equilátero de lado 4. Sea P un punto en el interior del trángulo. Determinar la suma de las longitudes de los tres segmentos con extremo en P y que son perpendiculares a cada uno de los lados del triángulo.

Propuesto 43. Considerar un paralelogramo $DEFG$. Sea C un punto en el lado FG. Sea AB un segmento que contiene al punto E tal que $DCBA$ es un paralelogramo. Si el área de $DEFG$ es 20, determinar el área de $DCBA$.

Propuesto 44. Las ciudades A,B,C y D están en los vértices de un cuadrado $ABCD$ de lado 100 kilómetros. Se debe conectar las ciudades mediante carreteras. Un ingeniero propone construir una carretera que una A con B, otra que una B con C, otra entre C y D, para terminar con una cuarta carretera entre D y A. Esto require construir un total de 400 km de carretera. Otro ingeniero propone un plan alternativo más económico: unir A y D, unir B con C y finalmente unir el punto medio de AD con el punto medio de BC. Este plan requiere construir 300 km de carretera. Sin embargo, el presupuesto para conectar las ciudades alcanza para construir a lo más 283 kilómetros de carretera.

El abuelo Anacleto, matemático jubilado y aventurero, consultado por las autoridades, descubrió una manera de unir las 4 ciudades construyendo menos de 283 kilómetros de carretera. Tu tarea es descubrir la manera propuesta por el abuelo.

Propuesto 45. Los Poliminós se forman poniendo uno o varios cuadrados adyacentes en las distintas posiciones posibles. Hay un Monomino, un domin ó y dos triminós, como se muestra en la figura. ¿Cuántos tetrominos(4 cuadrados) hay? ¿Cuántos pentominos (5 cuadrados) hay? ¿Cuántos hexominos (6 cuadrados) hay? Dibujarlos.



Propuesto 46. Suponga que se pone un monomino en la esquina inferior izquierda y otro en la superior derecha de un tablero de ajedrez (8×8). ¿Puede el resto del tablero recubrirse usando 31 dominós?

Propuesto 47. Considerar un tablero de ajedrez $8{\times}8$. ¿Es posible recubrir el tablero usando un monomino y 21 triminós rectos (los triminós rectos son los de 1×3). ¿Es posible recubrir el tablero usando un monomino y 21 triminós L (los triminós L son los triminós que no son de 1×3).

Propuesto 48. Considerar un tablero cuadriculado de 5×5. Se tienen 8 triminós L (los triminós L son los triminós que no son de 1×3) y un monominó. Indicar en qué casilleros del tablero es posible colocar el monomin ó para que el resto del tablero pueda recubrirse usando los 8 triminós L.

Propuesto 49. Con los números 1, 2, 3 y 4 se pueden formar dos parejas que suman lo mismo: 1+4 y 2+3 dan como resultado 5. Similarmente, con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 se pueden formar 3 parejas que suman los mismo. ¿Cuáles son estas 3 parejas? Con los números del 1 al 20 se pueden formar 10 parejas que sumen lo mismo. ¿Cuáles son? En general, si se tiene cierta cantidad de números, por ejemplo del 1 al 50, ¿puedes explicar cómo se pueden formar parejas con esos números de manera que todas esas parejas sumen los mismo?

Propuesto 50. El número 18 tiene la siguiente propiedad: al sumar sus dígitos da como resultado $1 + 8 = 9$, y 18 se puede dividir por 9. No todos los números tienen esta curiosa propiedad. Por ejemplo, para el número 28 se tiene $2 + 8 = 10$, y 28 no se puede dividir de manera exacta por 10. El caracol Jacinto dice que el número de dos dígitosmás grande que tiene la propiedad de poder dividirse por la suma de sus dígitos es el 60. Tu sabes que el caracol Jacinto está equivocado. El problema consiste en explicarle al caracol por qué está equivocado (escribe tu explicación). Además, debes encontrar el número de dos dígitos más grande que pueda dividirse por la suma de sus dígitos y dar un argumento que convenza al caracol (que es conocido por ser muy porfiado) de que el número que tu descubriste es efectivamente el más grade.

Propuesto 51. El siguiente problema es el problema número 17 que aparece en la obra Aritmética, escrita por Diofanto de Alejandría aproximadamente el año 250 dc. Los trabajos de Diofanto pasan de simples puzzles numéricos a complejos problemas que tuvieron un alto impacto cuando su obra fue traducida al Latín y estudiada más de 1200 años después de que la escribiera.

Dados cuatro números, podemos formar cuatro trios distintos. Si la suma de los números en cada uno de los trios es 22, 24, 27 y 20 respectivamente. ¿Cuáles son los cuatro números?

Propuesto 52. El siguiente problema también fue propuesto por Diofanto Encontrar tres números tales que el producto de dos cualesquiera de ellos sumado con el tercero siempre da un cuadrado perfecto.

Propuesto 53. Alicia (A) y Basilio (B) juegan un juego en un tablero cuadriculado de 7×7. Alicia escribe una A en uno de los casileros. Luego, Basilio pone una B en un casillero adyacente al marcado recién por Alicia (adyacente significa que está al lado del casillero anterior horizontal o verticalmente, no en diagonal). Luego, Alicia pone una A en un casillero desocupado adyacente al marcado recién por Basilio, y así sucesivamente. Pierde el jugador que no puede realizar una movida. ¿Tiene alguno de los jugadores una estrategia para ganar siempre? ¿Cuál?

Propuesto 54. El abuelo Anacleto, matemático jubilado y aventurero, es tan anciano que su número de carnet tiene solo seis cifras (tampoco tiene guión). El número de carnet del abuelo es divisible por 73 y, curiosamente, también es divisible por 2008 (lo que demuestra que el abuelo siempre se mantiene vigente). Además, las últimas dos cifras forman un número de dos dígitos que es un cuadrado perfecto. ¿Cuál es el número de carnet del abuelo?

Propuesto 55. Hay cuatro maneras de obtener 4 sumando números enteros positivos:

$$1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 = 2 + 2 = 3 + 1 = 4,$$

los cambios en el orden de los sumandos no se cuentan como nuevas soluciones. ¿De cuántas maneras distintas se puede obtener 12 sumando enteros positivos?

Propuesto 56. Una anciana campesina lleva al mercado una cesta de manzanas. Al primer comprador le vendió la mitad de todas las manzanas y media manzana más, al segundo la mitad de las restantes y media más, al tercero la mitad de las que le quedaban y media más, y así sucesivamente. Cuando el sexto comprador compró la mitad de las que quedaban y media más, la canasta de la viejecita quedó vacía pues terminó de vender todas sus manzanas. Si todos los compradores tenían manzanas enteras, ¿cuántas manzanas llevó la campesina al mercado?

Propuesto 57. El "tío platudo" deja en herencia su fortuna a sus cuatro sobrinos. Arturo, el mayor, debe recibir un tercio del total de la fortuna. Bernardo y Conrado, que tienen la misma edad, reciben un cuarto cada uno de la fortuna total. El resto de la herencia es para Dióscoro, el menor de los sobrinos. ¿Qué porción de la fortuna del tío recibe Dióscoro?

Propuesto 58. En la expresión

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 = 100$$

se pueden insertar siete signos más y menos para obtener una igualdad de la siguiente forma:

$$1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 100.$$

¿Se puede obtener una igualdad insertando solo tres signos más y menos?

Propuesto 59. El siguiente problema es el problema número 15 que aparece en la obra Aritmética, escrita por Diofanto de Alejandría. Dos números son tales que si el primero recibe 30 del segundo, entonces lo duplica (el primero al segundo), pero si el segundo recibe 50 del primero, entonces lo triplica (el segundo al primero). ¿Cuáles son los números?

Propuesto 60. Los egipcios conocían bien las fracciones y podían operar con ellas. Sin embargo, su manera de entenderlas tenía una notable diferencia con la actual: ellos solo usaban fracciones cuyo numerdor era 1 (además de ⅔, que no usaremos aquí). El papiro de Rhind, de más de 3500 años de antiguedad, contiene una tabla de fracciones con numerador 2 y denominador impar como las siguientes:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15},\ \frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \ \dots$$

Dada una fracción con numerador 2 y denominador impar de la forma $\frac{2}{2n+1}$, con n un entero positivo, encuentre una fórmula general que permita descomponer tal fracción como una suma de dos fracciones distintas de numerador uno.

Además encuentre una descomposición en fracciones distintas cuyo numerador vale uno para las dos fracciones que siguen en el Papiro de Rhind: $\frac{2}{9}$ y $\frac{2}{11}$.

Propuesto 61. Determinar el valor exacto de

$$\sqrt[3]{\frac{1\cdot 2\cdot 4 + 2\cdot 4\cdot 8 + 3\cdot 6\cdot 12 + \ldots + 100\cdot 200\cdot 400}{1\cdot 3\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 18 + 3\cdot 9\cdot 27 + \ldots + 100\cdot 300\cdot 900}}$$

Propuesto 62. Repartidos en una isla viven 101 camaleones que varían su camuflaje entre dos colores: Amarillo o Café. Al encontrarse dos de estos camaleones, realizan instintivamente una especie de danza que termina con ambos chocando sus cabezas y cambiando de color. Esta es la única manera en que pueden cambiar de color. En el mes de Enero, todos los camaleones de la isla eran de color Amarillo. ¿Es posible que en algún momento todos los camaleones sean de color Café?

Propuesto 63. Encontrar todas las fracciones irreductibles (esto quiere decir que no se pueden simplificar) con la propiedad que si se suma 2 al numerador y al denominador, la fracción resultante es el doble que la original.

Propuesto 64. Un campesino tenía varias vacas. Durante el mes pasado, dos terceras partes de ellas parieron un ternero cada una. Después, por deudas, tuvo que vender un tercio de los terneros y vacas que tenía. Si se quedó con un total de 10 (entre vacas y terneros), ¿cuántas vacas tenía al principio?

Propuesto 65. Un campesino tiene varias vacas. Durante el mes pasado, dos terceras partes de ellas parieron un ternero cada una. Entre vacas y terneros, ahora son en total 15. ¿Cuántas son vacas y cuántos son terneros?

Propuesto 66. Se tiene que $7 \times 858 = 6006$ y $12 \times 5 = 60$. Demostrar que para cualquier número entero positivo N, existe un número entero positivo m tal que el producto $N \times m$ se escribe sólo con dígitos 6 y 0.

Propuesto 67. Calcular el valor exacto de la siguiente suma:

$$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

Propuesto 68. Determinar todos los números n de dos dígitos tales que al dividir 2008 por n el resto es 6. Por ejemplo, al dividir 2008 por 2002 queda resto 6, pero 2002 tiene cuatro dígitos, así que no es uno de los buscados.

Propuesto 69. Determinar el dígito de las unidades del siguiente número:

$$1^{2008} \cdot 3^{2006} \cdot 5^{2004} \cdot 7^{2002} \cdot 9^{2000} \cdot 11^{1998} \cdot \ldots \cdot 2005^{4} \cdot 2007^{2}$$

Propuesto 70. En su infancia, al abuelo Anacleto le gustaba jugar con tablas de números. Matías, uno de sus bisnietos, encontró en el baúl de recuerdos del abuelo hojas y hojas llenas de tablas con números como las siguentes:

3	5
12	4

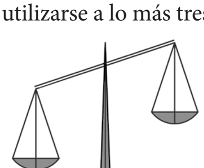
45	1
37	13

1	5
6	8

101	257
41	128

Las notas del abuelo decían: Las llené al azar con números distintos, y en todas estas tablas hay por lo menos dos números que si los resto me da un múltiplo de 3. Así, en la primera tabla, $12 - 3 = 6$, en la segunda $13-1 = 12$, en la tercera $8-5 = 6$ y en la cuarta $101-41 = 60$. Enigma: ¿Existirá una tabla de 2×2 llena con números enteros positivos distintos que <u>no</u> tenga ningún par de números cuya resta sea un mútiplo de tres? <u>Nota.</u> Que no puedas encontrar esa tabla no asegura que no exista. Si piensas que esa misteriosa tabla no existe quiere decir que <u>nadie</u> podrá encontrarla jamás aunque la busque por años. Por lo tanto, debes explicar por qué piensas tal cosa.

Propuesto 71. El Abuelo Anacleto tiene 80 monedas de oro, pero entre ellas hay una falsa, que es más liviana que las demás, las cuales pesan todas exactamente lo mismo. Se trata de descubrir cuál es la moneda falsa, pero debe usarse para ello una balanza de platillo como la de la figura, y solo puede utilizarse a lo más tres veces.



Propuesto 72. En una reunión de amigas hubo un total de exactamente 28 besos en la mejilla. Cada amiga le dio exactamente un beso a cada una de las asistentes a la reunión. ¿Cuántas amigas fueron a la reunión?

Propuesto 73. Considerar el número

$$N = 1234567891011121314151 6\ldots2017$$

que resulta de poner uno junto a otro los dígitos de los números del 1 al 2017. El dígito en la posición 15 de izquierda a derecha de N es 2, y el que está en la posición 20 de izquierda a derecha es 1. Determinar el dígito en la posición 2017 de N.

Propuesto 74. En la figura hay tres X y tres Y alternadas en los últimos 6 casilleros de una fila de 10 casillas.

				X	Y	X	Y	X	Y
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

El objetivo es poner las tres Y en las tres primeras casillas y las tres X en las casillas 4, 5 y 6. Se puede realizar sólo el siguiente movimiento: tomar dos letras que estén juntas y moverlas a dos casillas vacías sin cambiar su orden original. Se debe lograr el objetivo, a partir de la posición inicial, haciendo a lo más tres movidas. ¿Es posible hacerlo?

Propuesto 75. Fernanda y sus 3 hermanos tratan de convencer a sus padres de que les compren una super piscina inflable para el patio de la casa del Abuelo Anacleto: "…nosotros les pagaremos la mitad del precio de la piscina, usteden deben ahorrar y juntar la otra mitad y así podremos comprarla", les respondieron sus padres. La cantidad de dinero que deben juntar entre los 4 es un número de 5 cifras. Si se divide en 4 partes iguales, cada uno de ellos debe conseguir una cantidad que también es un número de 5 cifras. "Que raro", dice Fernanda. "La cantidad de dinero que debemos poner cada uno tiene las mismas cifras que la que debemos juntar entre los 4, sólo que las cifras están en el orden inverso". ¿Cuánto vale la super piscina inflable que quieren?

Propuesto 76. Calcular el valor exacto de

$$\sqrt{2x\sqrt{x\sqrt{x}}} \text{ para } x = 16.$$

Propuesto 77. Cuatro hermanos tratan de convencer a sus padres de que les compren una piscina inflable. Sus padres respondieron: "… nosotros les pagaremos la mitad del precio de la piscina, usteden deben ahorrar y juntar la otra mitad y así podremos comprarla". La cantidad de dinero que deben juntar entre los 4 es un número de 5 cifras. Si se divide en 4 partes iguales, cada uno de ellos debe conseguir una cantidad que también es un número de 5 cifras. "Que raro", dice uno de los hermanos. "La cantidad de dinero que debemos poner cada uno tiene las mismas cifras que la que debemos juntar entre los 4, sólo que las cifras están en el orden inverso". ¿Cuánto vale la piscina inflable que quieren?

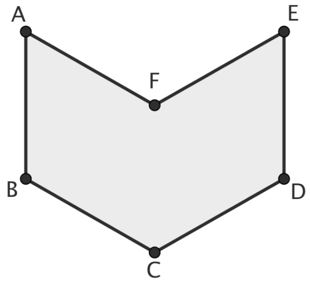
Propuesto 78. Demostrar que si a un número natural de 3 cifras se le resta la suma de sus dígitos, el resultado es divisible por 9.

Propuesto 79. En una caja hay 200 fichas blancas y 200 negras. El abuelo Anacleto saca de la caja 50 fichas blancas y 100 negras, echándolas en una bolsa. Luego pide a su nieto Daniel que saque al azar 3 fichas de la bolsa. Si las 3 fichas que saca son blancas, debe guardarlas en su caja y echar a la bolsa 2 nuevas fichas negras. Si dos de las fichas son blancas y una negra, debe guardar en la caja la ficha negra y devolver las otras dos a la bolsa. Si una ficha es blanca y las otras dos son negras o si las tres son negras debe hacer lo mismo, guardar en la caja una ficha negra y devolver las otras dos a la bolsa. Se repite lo mismo una y otra vez, y la cantidad de fichas en la bolsa va disminuyendo hasta que quedan sólo dos. ¿De qué color son estas dos fichas?

Propuesto 80. Calcular el valor de la suma de todos los números naturales cuyo cuadrado es menor que 2017.

Propuesto 81. El abuelo Anacleto, matemático jubilado y aventurero, llega al siguiente acuerdo con su nieto, que era un poco perezoso. Por cada problema de matemáticas que resuelva correctamente le pagará \$80, pero el nieto debe pagar \$50 por cada problema incorrecto o que no pueda resolver. Luego de enfrentar 26 problemas, ninguno le debe pagar nada al otro: la cuenta queda en cero. ¿Cuántos prolemas resolvió correctamente el nieto del abuelo?

Propuesto 82. En la figura, se tiene que AB es paralelo a ED, AF es paralelo a BC y FE es paralelo a CD. Todos los segmentos miden 1 y $\angle BAF = \angle FED = 60^o$. Determinar el área de la figura.



Propuesto 83. El abuelo Anacleto, matemático jubilado y aventurero, fue a probar suerte a un casino. Gastó un tercio de su dinero comprándose un *whisky on the rocks*, y perdió dos tercios de lo que le quedaba jugando póker. Si salió del casino con \$1200, ¿cuánto dinero tenía cuando llegó?

Propuesto 84. Todos los alumnos del tercero medio del Liceo deportivo juegan fútbol y/o ajedrez. La séptima parte de los que juegan fútbol también juega ajedrez y un noveno de los que juegan ajedrez también juega fútbol. Con estos datos, ¿es posible deducir que más de la mitad de los alumnos del curso juega ajedrez? ¿Por qué?

Propuesto 85. Encontrar todas las ternas de números reales (x, y, z) que satisfacen las ecuaciones:

$$xy = z,\ yz = x,\ zx = y.$$

Propuesto 86. Encontrar todos los pares de números enteros (p, q) tales que:

$$22p - 32q = 55$$

Propuesto 87. Se deben eliminar seis *O* del siguiente arreglo de manera que en todas las filas, todas las columnas y en las dos diagonales principales haya una cantidad par de *O*.

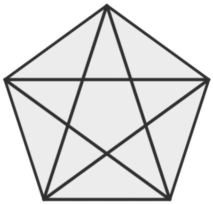
O	O	O	O
O	O	O	O
O	O	O	O
O	O	O	O

Propuesto 88. El abuelo Anacleto, matemático jubilado y aventurero, le promete a su nieta una paga de \$1000 más un estuche nuevo por 12 días de trabajo ayudándolo a ordenar sus escritos. Luego de 7 días de trabajo la nieta se aburre y renuncia. El abuelo, luego de sacar unas cuentas, le paga por los 7 días trabajados con su estuche y \$200. ¿Cuánto vale el estuche?

Propuesto 89. Tienes dos relojes de arena. Uno mide 13 minutos y el otro 9 minutos. El abuelo Anacleto necesita preparar una poción mágica que debe hervir por exactamente 30 minutos. Se deben medir los 30 minutos exactos con los dos relojes de arena. ¿Cómo hacerlo?

Propuesto 90. Los números cuadrados perfectos son 1, 4, 9, 16, ..., es decir, los que son iguales al cuadrado de un entero positivo. Encontrar un número cuadrado perfecto de 4 dígitos tal que todos sus dígitos sean pares.

Propuesto 91. ¿Cuántos triángulos hay en total en la siguiente figura?



Propuesto 92. El abuelo Anacleto, matemático jubilado y aventurero, está con un grupo de sus nietos. Ellos le piden dinero para comprar huevitos de chocolate. El abuelo dice: *Si les diera* \$70 *a cada uno me sobrarían* \$240. Piensa el abuelo. *Pero si les quisiera dar* \$90 *a cada uno me faltarían* \$320. ¿Con cuántos de sus nietos está el abuelo y cuánto dinero tiene?

Propuesto 93. Los *números cuadrados perfectos* son 1, 4, 9, 16, etc. Es decir, son los números que resultan de elevar al cuadrado un entero positivo. En este problema se pide determinar el menor entero positivo por el cual hay que multiplicar a 2008 para que el resultado sea un cuadrado perfecto.

Propuesto 94. Determinar la suma de los primeros 60 dígitos que aparecen a la derecha de la coma en la escritura como número decimal de $\frac{1}{7}$.

Propuesto 95. Resolver la ecuación

$$(x + 2^{2009})^2 - (x - 2^{2009})^2 = 2^{2010}.$$

Propuesto 96. En un torneo de tenis participaron 150 jugadores. En cada ronda se forman parejas por sorteo, que juegan un partido para determinar quién avanza a la ronda siguiente. Si un jugador queda libre, pasa de ronda sin jugar. ¿Cuántos partidos se jugarán en total en el torneo?

Propuesto 97. Se usaron los cinco neumáticos de un auto (incluyendo la de respuesto) para un viaje de 5000 kilómetros. Si todas las ruedas fueron usadas la misma cantidad de kilómetros, ¿cuánto anduvo cada una?

Propuesto 98. ¿Cuántos números menores que 200 son tales que la suma de sus dígitos es igual a 7?

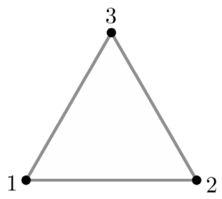
Propuesto 99. El Abuelo Anacleto, matemático jubilado y aventurero, formó tres montones de porotitos. Un primer montón con 11 porotos, otro con 7, y un tercero con 6. *El objetivo es dejar tres montones iguales con 8 porotos*, dice el abuelo a sus nietos, prometiendo huevitos de chocolate al que lo logre.

Se pueden pasar porotos de un montón a otro, pero con la siguiente condición: se deben pasar la misma cantidad de porotos que las que ya tiene el montón que recibe, ni más ni menos, y todos los porotos deben sacarse de un mismo montón (por ejemplo, un primer movimiento puede ser pasar 6 porotos del segundo montón al tercero). ¡Se debe llegar al objetivo realizando sólo tres movimientos!. ¿Cómo hacerlo?

Propuesto 100. En su juventud, el Abuelo Anacleto era aficionado al juego. En cierta ocasión jugó poker tres días seguidos, sin dormir. El primer día duplicó su dinero al principio, pero en la última mano perdió \$300. El segundo día comenzó triplicando su dinero, y en la última mano perdi ó \$540. El tercer día cuadruplicó su dinero, perdiendo \$720 en la última mano.

Finalmente, el sueño se apoderó del entonces joven abuelo y contó su dinero al retirarse del casino. Tenía \$480. Si sus únicos gastos e ingresos fueron en el póker. ¿Con cuánto dinero llegó al casino el abuelo?

Propuesto 101. En la figura se observan los números 1, 2 y 3 en los vértices de un triángulo. El objetivo de este problema es poner los números 4, 5, 6, 7, 8 y 9 sobre los lados del triángulo de manera que los números que están en cada lado (incluyendo los dos vértices del lado) sumen 17.



Propuesto 102. ¿Cuántos dígitos tiene el número $10^{2009} - 2009$?

Propuesto 103. Un reloj digital muestra las 13:06 horas. ¿Cuál es el tiempo que pasará para que aparezcan de nuevo por primera vez en la pantalla del reloj exactamente los mismos dígitos, en cualquier orden?

Propuesto 104. La suma de cinco números impares consecutivos es 125. Determinar el mayor de estos números.

Propuesto 105. Determinar cuántos triángulos diferentes hay, tales que su perímetro es 10 y las medidas de sus tres lados son números enteros.

Propuesto 106. Determinar el menor entero positivo $n \neq 1$, que divide exactamente la cantidad $5^{2009} - 3^{2007}$

Propuesto 107. En una bolsa hay 5 bolitas azules, 5 bolitas blancas y 5 bolitas café. ¿Cuál es la cantidad mínima de bolitas que deben sacarse de la bolsa (al azar) para estar totalmente seguros de tener dos bolitas del mismo color?

Propuesto 108. Calcular la suma de todos los enteros positivos que son múltiplos de 7, menores que 200.

Propuesto 109. María nació cuando su hermana Josefina tenía 7 años. Hoy Josefina tiene el doble de la edad de su hermana. ¿Cuáles son las edades actuales de María y de Josefina?

Propuesto 110. El tío Miguel es muy ágil, a pesar que en 18 años más tendrá el doble de la edad que tenía hace 18 años. ¿Cuál es la edad actual del tío Miguel?

Propuesto 111. Una piñata está llena de caramelos. Los caramelos que están en la piñata se podrían repartir en partes iguales a 3 niños. También se pueden repartir equitativamente entre 4, 5, 6, 7 y 8 niños. Sabiendo que son menos de mil, ¿cuántos caramelos hay en la piñata?

Propuesto 112. Determinar cuál es el menor número positivo entre los siguientes: $a = 10 - 3\sqrt{11}$, $b = 3\sqrt{11} - 10$, $c = 18 - 5\sqrt{13}$, $d = 51 - 10\sqrt{26}$ y $e = 10\sqrt{26} - 51$.

Propuesto 113. Determinar el mayor entero positivo n tal que $n^{200} < 5^{300}$.

Propuesto 114. Determinar el valor exacto del siguiente producto.

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{99^2}\right)\left(1-\frac{1}{100^2}\right)$$

Propuesto 115. Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 10. ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar el área del triángulo?

Propuesto 116. En una carrera de autos, el lugar en que llegó Eduardo fue justo al medio de todos los participantes. Fernando llegó más atrás, en el décimo lugar, y Gamal llegó en el lugar 16. ¿Cuántos competidores participaron?

Propuesto 117. Si

$$x + \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 20,$$

calcular el valor exacto de

$$x^2 + \sqrt{x^4 - 1} + \frac{1}{x^2 - \sqrt{x^4 - 1}} - \frac{1}{200}$$

Propuesto 118. Asumir que los números a, b y c son conocidos. Si $xy = a$, $xz = b$, y $yz = c$, determinar el valor de $x^2 + y^2 + z^2$ en términos de a, b y c.

Propuesto 119. Esteban tiene la misma cantidad de hermanos que de hermanas, pero sus hermanas tienen el doble de hermanos que de hermanas. ¿Cuántos hermanos y hermanas tiene Esteban en total?

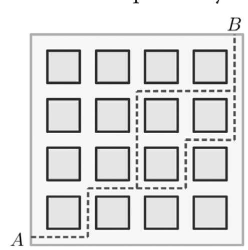
Propuesto 120. Sean p, q dos números enteros positivos diferentes tales que

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Encontrar el valor de $p + q$.

Propuesto 121. Usando una vez cada uno de los dígitos del 1 al 9 se forman tres números de tres cifras cada uno. ¿Es posible lograr que ninguno de estos tres números sea múltiplo de 3?

Propuesto 122. La figura muestra un plano de un sector de la ciudad que incluye 16 manzanas.



Se indican dos rutas distintas para ir de A a B. ¿Cuántas rutas distintas hay en total para ir de A a B moviéndose solo hacia la derecha y hacia arriba?

Propuesto 123. En un tonel hay 37 litros de pintura. El primer día se utiliza un litro de pintura y se rellena el tonel con 1 litro de agua especial. El segundo día se utilizan 2 litros de la mezcla resultante y luego se rellena el tonel con 2 litros de agua especial. El tercer día se utilizan 3 litros de la mezcla del tonel y luego se rellena con 3 litros de agua especial. Así sucesivamente, hasta que el tonel queda vacío y no se vuelve a rellenar. ¿Cuántos litros de agua especial se utilizaron en todo el proceso?

Propuesto 124. Sean a, b, c y d números enteros positivos tales que

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < 1.$$

Considerar las cantidades

$$A_1 = \frac{b}{a}, A_2 = \frac{d}{c}, A_3 = \frac{bd}{ac}, A_4 = \frac{b+d}{a+c}, A_5 = 1.$$

Indicar la manera correcta de ordenar estas cantidades de menor a mayor

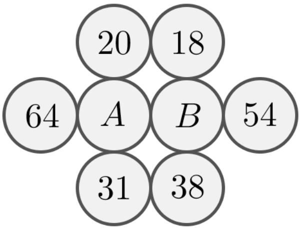
Propuesto 125. Dar un argumento que demuestre que

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2007}{2008} > \frac{1}{2009}.$$

Propuesto 126. Encontrar un entero positivo n tal que $n^2 + n + 41$ no es un número primo.

Propuesto 127. Un grupo de estudiantes pasea juntoa su profesora. Pasan a un negocio que vende sólo helados de agua y chocolates. Si la profesora le compra a cada niño un helado de agua y a cada niña un chocolate, gastaría exactamente $1 peso más que si le compra a cada niño un chocolate y a cada niña un helado. Sabiendo que hay más niños que niñas, determinar la diferencia entre la cantidad de niños y la cantidad de niñas que hay en el grupo.

Propuesto 128. Agustina (A) y Berenice (B) están rodeadas por 6 de sus amigas, como en la figura. En cada círculo se pone la edad de la amiga. La edad de Agustina es el promedio de las edades de sus 4 vecinas más cercanas, al igual que la de Berenice. ¿Cuál es la edad de Agustina?



Propuesto 129. La suma de los primeros 50 múltiplos de 4 es 4 + 8 + 12 + 16 + ... + 200, y la suma de los 50 primeros múltiplos de 3 es 3 + 6 + 9 + 12 + ... + 150. ¿Cuál es el resultado final de restar estas dos sumas?

Propuesto 130. Antonio, Bernardo y Camilo ocupan los 3 primeros lugares de la Maratón de Talcahuano, pero no necesariamente en el orden que se nombran. Se tienen los siguientes datos: El que llegó en tercer lugar es hijo único y, además, es el menos estudioso de los tres.

Camilo, que es amigo del hermano de Antonio, es más estudioso que el corredor que ocupó el segundo lugar. Indicar qué orden ocuparon Antonio, Bernardo y Camilo.

Propuesto 131. Usando una vez cada uno de los dígitos del 1 al 9 se forman tres números de tres cifras cada uno. ¿Cuál es el mayor valor posible que puede tener la suma de estos tres números?

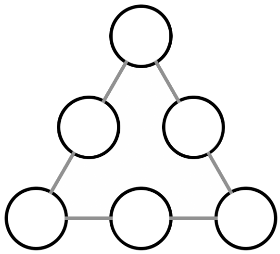
Propuesto 132. Determinar cuántos números entre 1 y 1000 son múltiplos de 3 y terminan en el dígito 6.

Propuesto 133. En el patio del colegio hay 5 niños formando una fila. Antonio está 10 metros detrás de Bernardo, quién está 25 metros delante de Camilo. Camilo está 5 metros detrás de Dante, quién está 25 metros detrás de Esteban. Indicar el orden de los niños, del primero al quinto.

Propuesto 134. Se le pide a Pedro que a cierto número le sume 4 y luego lo divida por 5. Pedro se confunde y en lugar de hacer eso, primero le suma 5 y luego lo divide por 4, dándole como resultado 54. ¿Cuál es el resultado de hacer las operaciones correctamente?

Propuesto 135. Aprovechando una liquidación, la señora Marta hace una compra por un total de $100 000 en una tienda de ropa. Se le aplica un 10% de descuento por ser cliente frecuente y luego, sobre el precio resultante, un 20% de descuento adicional por la liquidación. Indicar el monto final que canceló la señora Marta.

Propuesto 136. En este problema debes ubicar números del 1 al 9 en cada uno de los espacios de manera que la suma de cada uno de los tres lados del triángulo sea igual a 20.



Propuesto 137. A veces se puede cambiar signos de suma por signos de multiplicación sin alterar el resultado. Con dos números, se tiene que $2+2 = 2\times2$. La solución con tres números es sencilla también: $1+2+3 = 1 \times 2 \times 3$. En este problema debes encontrar una manera con 4 números y una con 5 números (no se admite el uso del 0).

Propuesto 138. Una cuncuna se arrastra sobre una regla de 30 centímetros. Se demora 60 segundos en ir desde la marca de 30 cm a la marca central de 15 cm. Si avanza siempre a la misma velocidad. ¿Cuántos segundos le toma ir de la marca de 15 cm a la marca de 1 cm?

Propuesto 139. En un pueblo hay 10 postes telefónicos. Cualquier par de postes está unido directamente mediante un cable rojo. ¿Cuántos cables rojos son necesarios para unir todos los pares de postes?

Propuesto 140. Antonia, Bernarda y Claudia, una morena, una rubia y una colorina (no necesariamente en ese orden) están sentadas en círculo jugando cartas. Cada una entrega tres naipes a la persona que está a su derecha. Bernarda le pasa tres ases a la morena. Antonia le pasa la reina de espadas y dos corazones a la niña que entregó cartas a la colorina. ¿Cuál es el color de pelo de cada una de ellas?

Propuesto 141. Dispones de tres jarrones con capacidad de 19, 13 y 7 litros, respectivamente. Los jarrones no tienen ningún tipo de marca. El de 19 litros está vacío y los otros dos están llenos de vino. Se deben medir 10 litros exactos de vino usando solamente estos tres jarrones, sin derramar nada. ¿Cómo hacerlo?

Propuesto 142. El abuelo Anacleto cuenta la siguiente antigua historia a sus nietos: *Tres viajeros entraron a una posada a descansar y comer. Encargaron a la dueña que les hiciera panes y se fueron a dormir. La dueña dejó los panes para los tres en la panera sobre la mesa y se fue sin despertarlos. Uno de los viajeros despertó, vio los panes y para no despertar a sus compañeros contó los panes, comió su parte y se fue a dormir de nuevo. Al poco rato despertó el segundo viajero. Como no sabía que uno de sus compañeros ya había comido su parte contó los panes que quedaban, comió la tercera parte y se fue a dormir. Después despertó el tercero, creyendo que era el primero en despertar contó los panes que quedaban y comió la tercera parte.*

Por la mañana despertaron los tres viajeros y vieron que quedaban 8 panes. Entonces conversaron y quedó claro todo lo que había pasado.

¿Cuántos panes puso la dueña de la posada en la mesa? ¿Cuántos se comió cada viajero? De los 8 panes que quedan, ¿cuántos debería comer cada uno para que a todos les tocasen partes iguales?

Propuesto 143. Si hoy es Sábado, ¿qué día de la semana será en 200 días más.

Propuesto 144. Daniel pesa 8 kilos, más la mitad de su propio peso. ¿Cuántos kilos pesa Daniel?

Propuesto 145. Al escribir los números del 1 al 15 se usa en total 8 veces el dígito 1. ¿Cuántas veces se usa el 1 para escribir los números del 1 al 500?

Propuesto 146. El mayor número primo que divide a 77 es 11. ¿Cuál es el mayor número primo que divide a 2009?

Propuesto 147. Dos pastores, Juan y Pedro, se encuentran en la montaña.
–Dame una oveja –le dice Juan a Pedro–. Así tendré el doble que tú.
Pero Pedro contesta:
–No. Mejor que me des tú una oveja. Entonces tendremos los dos la misma cantidad.
¿Cuántas ovejas tienen en total entre Juan y Pedro?

Propuesto 148. Resolver la ecuación

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}.$$

Propuesto 149. Un gato y un perro entrenados corren una carrera de 100 metros ida y vuelta. El perro avanza 3 metros a cada salto y el gato solo 2, pero da tres saltos por cada dos del perro. ¿Quién es el ganador de la carrera?

Propuesto 150. El abuelo Anacleto realizaba un viaje de Antir hacia Bontar a lomo de mula, con una velocidad uniforme. Al transcurrir 40 minutos de viaje, el abuelo preguntó al guía turístico cuánto camino habían recorrido. El guía turístico respondió: *La mitad de la distancia que hay hasta Centur* (Centur era un lugar entre Antir y Bontar). Cuando habían recorrido siete kilómetros más el abuelo preguntó qué distancia había hasta Bontar. El guía turístico respondió: *La mitad de la distancia que hay hasta Centur.* Llegaron a Bontar tras otra hora de viaje. ¿Cuál es la distancia entre Antir y Bontar?

Propuesto 151. En uno de sus viajes al extranjero, el abuelo Anacleto entró a uno tienda con cierta cantidad de dólares y centavos (un dolar son 100 centavos). Luego de comprar algunos recuerdos el abuelo notó que ahora tenía la misma cantidad de centavos que dólares con los que había entrado, pero tenía la mitad de dolares que centavos con los que entró. ¿Cuánto gastó el abuelo en la tienda?

Propuesto 152. Si

$$xy = 6, \text{ y } x^2y + xy^2 + x + y = 63,$$

determinar el valor exacto de $x^2 + y^2$.

Propuesto 153. Determinar si existen tres números enteros positivos impares a, b, c tales que

$$(a + b)^2 + (a + c)^2 = (b + c)^2.$$

Propuesto 154. Considerar un tablero cuadriculado de 5×41. Cada casilla se pinta de azul o de rojo al azar. Demostar que siempre habrá 3 filas y 3 columnas en el tablero tales que las 9 casillas en que se intersectan tienen el mismo color.

Propuesto 155. El siguiente es un antiguo acertijo: Dos pavos pesan juntos 20 kilos. Cada kilo del más pequeño cuesta $2000 más que cada kilo del pavo grande. La señora Eulalia compró el pavo pequeño por $8200 y la señora Hilda pagó 29600 por el pavo grande. ¿Cuánto pesaba cada pavo?

Propuesto 156. Un número N de seis dígitos tiene la siguiente propiedad. Su primer dígito es igual a su cuarto dígito. Su segundo dígito es igual a su quinto dígito y su tercer dígito es igual a su sexto dígito. Demostrar que N se puede dividir exactamente por 7, por 11 y por 13.

Propuesto 157. En un torneo de Rugby que dura 2 semanas participan 15 equipos. El abuelo Anacleto, matemático jubilado y aventurero, además de jugador de Rugby en su juventud, afirma que *no importa cómo se organicen los partidos del torneo, al final de la primera semana siempre habrá al menos un equipo participante que ha jugado un número par de partidos.* ¿Cómo llegó el abuelo a esta conclusión? (ojo, el 0 es un número par).

Propuesto 158. Calcular el siguiente producto:

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\times\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}\times\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{7}}{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}}\times\cdots\times\frac{\frac{1}{98}-\frac{1}{99}}{\frac{1}{99}-\frac{1}{100}}.$$

Propuesto 159. Un número primo p es un entero mayor que 1 que solo puede dividirse por 1 y por sí mismo. Algunos números primos son 2, 3, 5, 7, 11, ... Encuentra todos los números primos que sean iguales al cuadrado de un entero menos uno, es decir, iguales a $p^2 - 1$.

Propuesto 160. Los números 4 y 9 son cuadrados perfectos, y con ellos puede formarse el número de dos dígitos 49, que también es un cuadrado perfecto. ¿Cuántos cuadrados perfectos de tres dígitos pueden formarse con dos cuadrados perfectos (uno de un dígito y otro de dos dígitos, o viceversa).

Propuesto 161. Encontrar el menor número entero N tal que $\frac{1}{2}N$ es el cuadrado de un entero y $\frac{1}{3}N$ es el cubo de un entero.

Propuesto 162. Los números 3, 5 y 7 son tres números primos cuya diferencia es 2. ¿Existe otro trío de números primos con diferencia 2?

Propuesto 163. En una bolsa hay 100 bolitas. 30 de ellas son azules, 30 son blancas y 30 son de color café. Las restantes 10 son algunas negras y algunas moradas. ¿Cuál es la menor cantidad de bolitas que deben sacarse de la bolsa (sin mirar) para estar seguro que se sacaron al menos 10 del mismo color?

Propuesto 164. El abuelo Anacleto, matemático jubilado y aventurero, es dueño de un pequeño terreno que ganó en una de sus aventuras. A cambio de un total de \$5000 pesos, Manuel y Samuel se encargarán de sembrar papas en el terreno. Manuel puede sembrar una fila de papas en 40 minutos, y luego cubrirlas de tierra con la misma velocidad. Samuel puede sembar una fila en sólo 20 minutos, pero en el tiempo que el cubre de tierra dos filas, Manuel cubre tres. Suponiendo que el campo tendrá un total de 12 filas y que ambos trabajan constantemente, cada uno sembrando y cubriendo lo suyo, ¿cómo debe dividirse la paga de \$5000 para que cada uno de ellos reciba una cantidad proporcional a la tarea que cumplieron?

Propuesto 165. Cuatro de los traviesos nietos del abuelo Anacleto dicen lo siguiente:

Antonio: Exactamente uno de nosostros miente.

Belisario: Exactamente dos de nosotros mienten.

Carolina: Exactamente tres de nosostros mienten.

Daniela: Exactamente cuatro de nosotros mienten.

¿Cuántos de los nietos del abuelo están mintiendo y cuántos dicen la verdad?

Propuesto 166. Catalina, una de las nietas del abuelo Anacleto, se entretiene recortando cuadrados de cartón. Al comienzo tiene 10 cuadrados de de cartón de distintos tamaños. Toma algunos de ellos y recorta a cada uno en 4 cuadrados iguales. Luego toma otro grupo de cuadrados y nuevamente recorta a cada uno en 4 cuadrados iguales. Cuando se aburre de recortarlos, junta todos sus cuadrados y los cuenta: son en total 200. Después va donde el abuelo y le relata lo que estuvo haciendo. Inmediatamente el abuelo le dice que debe contar de nuevo sus cuadrados, pues se equivocó y no pueden ser 200. ¿Cómo llegó el abuelo a esa conclusión?

Propuesto 167. Cierto número entero positivo es tal que al dividirlo por 2 da resto 1, al dividirlo por 3 da resto 2, por 4 da resto 3, por 5 da resto 4, por 6 da resto 5, mientras que al dividirlo por 7 la división es exacta. ¿Cuál es el número?

Propuesto 168. En una reunión se encuentran 50 deportistas famosos. Cada uno de ellos es o futbolista o basquetbolista. Al menos uno de los 50 es futbolista. Si se eligen dos cualesquiera de estos deportistas, siempre al menos uno de ellos es basquetbolista. ¿Cuántos de los deportistas son futbolistas y cuántos son basquetbolistas?

Propuesto 169. Determinar el valor exacto de la cantidad

$$s = \sqrt[3]{25 + 5\sqrt{20}} + \sqrt[3]{25 - 5\sqrt{20}}$$

Propuesto 170. Considerar el número

$$N = \frac{2^{58} + 1}{5}\ .$$

Demostrar que N es un entero. Determine si es un número primo.

Propuesto 171. Los divisores de 6 son 1, 2, 3 y 6. La suma de los divisores de 6 es entonces 1 + 2 + 3 + 6 = 12. La suma de los divisores de 360 es 1170. ¿Cuál es la suma de los recíprocos de los divisores de 360?
Nota: El recíproco de un número n es $\frac{1}{n}$

Propuesto 172. Considerar un número primo p mayor que 3. Notar que, por ejemplo,

$$5^2 = 25 = 12 \times 2 + 1,$$

$$7^2 = 49 = 12 \times 4 + 1,$$

$$11^2 = 121 = 12 \times 10 + 1.$$

¿Es siempre el cuadrado de un número primo mayor que 3 igual a un múltiplo de 12 más 1 ?

Propuesto 173. Hay 27 ladrones en una llanura. Ninguna pareja de ladrones está a la misma distancia de otra pareja. Cada ladrón debe vigilar al ladrón que está a una menor distancia de él. El abuelo Anacleto, matemático jubilado y aventurero, afirma que "bajo estas condiciones, hay al menos un ladrón que no está siendo vigilado por nadie". ¿En qué se basa el abuelo para afirmar tal cosa?

Propuesto 174. Usando exactamente una vez cada uno de los dígitos 1, 2, 3, 4, ..., 9, construir un número de 9 cifras tal que:

El número es divisible por 9.

Al borrar el último dígito (el de las unidades), el número resultante es divisible por 8.

Al borrar los últimos dos dígitos, el número resultante es divisible por 7.

Al borrar los últimos tres dígitos, resulta un número divisible por 6.

Al borrar los últimos cuatro dígitos, resulta un número divisible por 5.

Y así sucesivamente. Al borrar los siete últimos dígitos, resulta un número divisible por 2.

Propuesto 175. Hay 100 puertas, enumeradas, en un pasillo. Todas están cerradas. Uno de los nietos del abuelo Anacleto, matemático jubilado y aventurero, juega el siguiente juego: Recorre de ida el pasillo y abre todas las puertas. Al volver cierra todas las puertas cuyo número es par. Luego va de nuevo por el pasillo y cambia de estado todas las puertas cuyo número es múltiplo de 3 (cierra las abiertas y abre las cerradas). Vuelve y cambia de estado todas las puertas cuyo número es múltiplo de 4, y así sucesivamente.

Si hace 50 viajes ida y vuelta (recorre en total 100 veces el pasillo), ¿qué puertas son las que finalizan abiertas?

Propuesto 176. Encontrar un número de 10 dígitos tal que el primer dígito indica la cantidad de ceros que hay en el número, el segundo dígito indica la cantidad de unos, el tercer dígito las cantidad de cifras iguales a dos, ..., y el décimo dígito la cantidad de nueves que hay en el número.

(Por ejemplo, si se tratara de un número de cuatro dígitos, sirve el 1210, pues tal número tiene un cero, dos unos, un dos y cero cifras tres).

Propuesto 177. Cuatro lanchas, *A*, *B*, *C* y *D* están en la misma orilla de un río. Para cruzar a la orilla opuesta, la lancha *A* demora 2 minutos, la *B* 4 minutos, la *C* 8 y la *D* 16 minutos. El abuelo Anacleto, matemático jubilado y aventurero, es el único que sabe conducir las lanchas. Una lancha puede remolcar a otra (solo a una), pero el tiempo que se demoran ambas en cruzar es igual al de la lancha más lenta de las dos. ¿Cuál es el menor tiempo que tomará al abuelo cruzar las 4 lanchas a la otra orilla? Recordar que el abuelo debe hacer viajes de ida y vuelta en lancha.

Propuesto 178. Dos de los nietos del abuelo Anacleto, un niño y una niña, jugaron al cachipún 10 veces. El niño usó tres veces piedra, seis veces tijera y una vez papel (no necesariamente en ese orden). La niña usó dos veces piedra, cuatro veces tijera y cuatro veces papel (no necesariamente en ese orden). Ninguno de los 10 juegos fue empate. ¿Cuál de los dos ganó más veces y por cuántos puntos? (1 punto por cada juego ganado).

Propuesto 179. Cada □ en la siguiente suma representa un dígito del 1 al 9. Se debe usar una vez cada uno de los 9 dígitos, sin repetir.

$$\frac{\square}{\square\,\square}+\frac{\square}{\square\,\square}+\frac{\square}{\square\,\square}=1.$$

Dos □ juntas representan un número de dos dígitos.

Propuesto 180. ¿Cuántos rectángulos formados por conjuntos de casillas y de lados paralelos a los lados del tablero hay en el tablero de ajedrez?

Propuesto 181. Un artesano debe pintar la superficie de 27 cubos de madera de distintos tamaños. Se da cuenta que la pintura le alcanza para pintar el doble de superficie que la de los 27 cubos. ¿Cómo hacerlo para aprovechar toda la pintura y crear más cubos pintados con el material disponible? (Los cubos se pueden cortar).

Propuesto 182. Dos jugadores, *A* y *B*, juegan con 17 fichas. Por turnos, sacan entre 1 y 3 fichas de las 17, con la restricción que un jugador no puede sacar la misma cantidad de fichas que sacó el anterior. Parte el jugador *A*. Gana el jugador que saca la última ficha o deja al contrincante sin movimiento válido posible. ¿Tiene alguno de los jugadores una estrategia para ganar siempre este juego? ¿Cuál? ¿Qué pasa si juegan con 60 fichas?

Propuesto 183. Dos jugadores, *A* y *B*, juegan con 27 fichas. Por turnos, sacan 1 ó 3 fichas de las 27. Parte el jugador *A*. Gana el jugador que saca la última ficha. ¿Tiene alguno de los jugadores una estrategia para ganar siempre este juego? ¿Cuál? ¿Qué pasa si juegan con 55 fichas?

Propuesto 184. Dos jugadores, *A* y *B*, juegan con 26 fichas. Por turnos, sacan 1 ó 3 ó 4 fichas de las 26. Parte el jugador *A*. Gana el jugador que saca la última ficha. ¿Tiene alguno de los jugadores una estrategia para ganar siempre este juego? ¿Cuál? ¿Qué pasa si juegan con 51 fichas?

Propuesto 185. Determinar todos los valores enteros de n para los cuales

$$(3n+7)^{n^2-9}=1$$

Propuesto 186. Considerar un número primo *p* mayor que 3. Notar que, por ejemplo,

$$5^2 = 25 = 12 \times 2 + 1,$$

$$7^2 = 49 = 12 \times 4 + 1,$$

$$11^2 = 121 = 12 \times 10 + 1.$$

¿Es siempre el cuadrado de un número primo mayor que 3 igual a un múltiplo de 12 más 1 ?

Propuesto 187. Los divisores de 6 son 1, 2, 3 y 6. La suma de los divisores de 6 es entonces 1 + 2 + 3 + 6 = 12. La suma de los divisores de 360 es 1170. ¿Cuál es la suma de los recíprocos de los divisores de 360?
Nota: El recíproco de un número n es $\frac{1}{n}$

Propuesto 188. Encontrar todos los valores enteros de a y b tales que

$$\frac{a}{4} + \frac{b}{5} = \frac{19}{20}.$$

Propuesto 189. Con 12 fósforos de 1 cm cada uno se forma un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5. El área de este triángulo es 3 × 4. Moviendo 5 fósforos, se debe crear una figura cuya área sea 2.

Propuesto 190. Rellenar cada recuadro con un dígito diferente del 1 al 9 de manera que las dos igualdades se cumplan:

$$\square\square \times \square = \square\square \qquad \square \times \square = \square\square$$

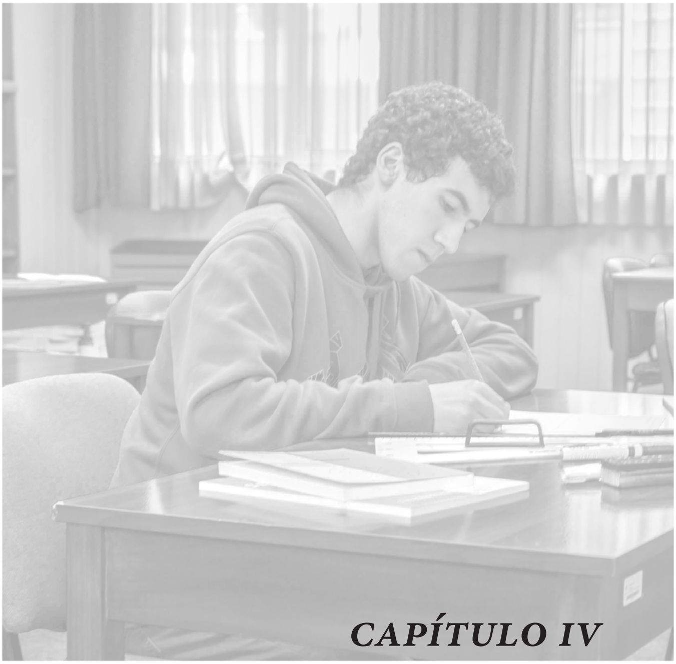
Dos recuadros seguidos representan un número de dos dígitos.

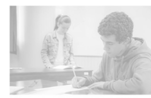
Propuesto 191. Se tienen 16 piezas de madera cuadradas de 1 × 1 cm, pintadas de 4 colores distintos: 4 son azules, 4 son blancas, 4 café y 4 son rojas. Se escribe un número entero distinto entre 1 y 4 en cada pieza azul. Lo mismo en cada pieza blanca, café y roja.

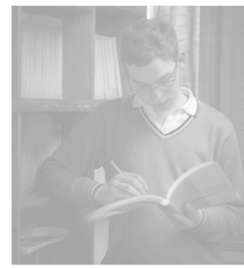
Formar con las 16 piezas un tablero cuadrado de 4 × 4 cm tal que en cada fila, columna y diagonal principal se encuentren los 4 colores y los 4 números.

Propuesto 192. Las abejas macho salen de huevos no fertilizados, es decir, tienen una madre pero no un padre. Las abejas hembra nacen de huevos fertilizados, por lo que tienen madre y padre. Así, una abeja hembra tiene dos antecesores de primera generación (padre y madre) y tiene tres antecesores de segunda generación (abuelo paterno y abuelos maternos). ¿Cuántos antecesores de décima generación tiene una abeja macho? ¿Cuántos de ellos son machos?

Propuesto 193. Usando 8 fósforos, hacer una figura que contenga dos cuadrados, ocho triángulos y una estrella de 8 puntas. Los fósforos se pueden superponer.







CAPÍTULO IV

DESAFÍOS

Desafío 1. El abuelo Anacleto, matemático jubilado y aventurero, en una tarde lluviosa de Junio, jugaba ajedrez con su nieta mientras sus otros 8 nietos jugaban dominó. Una vez que terminaron de jugar y dejaron el tablero y las piezas de dominó sobre la mesa, Juanito, uno de sus nietos, comenzó a poner fichas de dominó sobre el tablero de ajedrez. Cada ficha cubría exactamente dos cuadraditos del tablero. Juanito logró poner 32 fichas y cubrió completamente el tablero. Entonces el abuelo lo miró y le dijo. Juanito, si al tablero le quitamos dos cuadraditos, uno en una esquina, y otro en otra esquina, ¿podrás de igual manera cubrir el resto del tablero con fichas de dominó? María, una de sus nietas dijo, por supuesto que se puede, José, el nieto mayor, exclamó, imposible, mientras que Juanito un poco dudoso respondió depende de qué esquinas quitamos, ¿Que crees tu, se puede o no?

Desafío 2. El abuelo Anacleto, matemático jubilado y aventurero, se reúne todos los jueves a jugar cartas con cinco amigos, también matemáticos jubilados y aventureros como él. El jueves pasado los seis amigos llegaron usando sombreros distintos, pero al término del juego se confundieron a tal punto que ninguno de ellos salió con su propio sombrero. El abuelo Anacleto salió con el sombrero que pertenecía a quien salió con el sombrero de Boris. El dueño del sombrero que se llevó Conrado salió con el sombrero que pertenecía a quien salió con el de Darío. El que se llevó el sombrero de Emilio no era el dueño del que se llevó Facundo. ¿Quién se llevó el sombrero del abuelo Anacleto y de quién es el sombrero que está ahora en casa de Boris?

Desafío 3. En un día lluvioso de invierno, el abuelo Anacleto reunió a sus nietos para contarles que cinco de sus amigos habían decidido casarse en una misma semana y en días distintos, Lunes, Martes, Miércoles, Jueves y Viernes. Ana se casó un día Lunes, pero no con Wilson. El matrimonio de Sergio fue un día Miércoles. Roberto se casó un Viernes, pero no con Isabel. Vicente se casó con Francisca y su boda fue un día después que Evelyn.

El abuelo se dió cuenta que sus nietos estaban un poco aburridos, entonces les dijo que con toda la información que les había entregado ellos debían encontrar que día se casó Constanza y que día se casó Pablo. Entonces Alicia, la nieta menor del abuelo Anacleto, comenzó a hacer una tabla resumiendo la información, ¿eres tú capaz de completar la tabla y descubrir el día del matrimonio de Constanza y el día del matrimonio de Pablo?

	Pablo	Vicente	Sergio	Roberto	Wilson	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
Ana										
Constanza										
Evelyn										
Francisca										
Isabel										
Lunes										
Martes										
Miércoles										
Jueves										
Viernes										

Desafío 4. El abuelo Anacleto, matemático retirado, disfruta sus tardes haciendo pensar a sus nietos y a los amigos de estos con acertijos y problemas. "¿Cuántas maneras tenemos para pintar las caras de una moneda con dos colores, blanco y negro?" les pregunta el abuelo a los niños. Rápidamente los chicos gritan todos los números y razonamientos que se les vienen a la mente: "¡una!" dice Raquel "blanco por un lado y negro por el otro", "¡No, son dos! contesta Jorge, "te falta negro por un lado y blanco por el otro". El abuelo les aclara que en realidad es lo mismo, porque la moneda que él imagina es igual por ambos lados. "¡Diecisiete!", propone Diego y todos ríen. De pronto Sofía, tranquilamente, revela la solución correcta: "tres, porque también puede pintarse completa de blanco y completa de negro". Todos asienten. El abuelo les cuenta de la importancia de la simetría en el arte y el diseño. Pero Sofía no está contenta: "¿Qué pasa si tienes tres colores para pintar la misma moneda? ¿y cuatro colores? ¿y cinco colores?". El abuelo sonríe y responde rápidamente: "son seis, diez y quince posibilidades respectivamente". Todos lo miran sorprendidos, pues no saben que el abuelo conoce una fórmula general para resolver el problema con cualquier cantidad de colores. Sofía no se queda tranquila: "¿Y qué pasa si queremos pintar las caras de un cubo con dos colores?". El abuelo calla, piensa un rato y los invita a todos a tomar helados. Eso de seguro le dará tiempo de encontrarle respuesta a la pregunta de Sofía.

Desafío 5. El abuelo Anacleto, matemático jubilado y aventurero, tiene cinco nietas (que fueron quintillizas). Tres de ellas tienen los ojos verdes y siempre mienten, y dos tienen ojos negros y siempre dicen la verdad.

El abuelo ofrece un premio a la persona que adivine el color de ojos de sus nietas, que estarán con los ojos vendados, haciéndoles solo tres preguntas.

Un colega del abuelo, Jacinto, (también matemático jubilado) acepta el reto del abuelo Anacleto. Jacinto le pregunta a una nieta (María), ¿de qué color tienes tus ojos? María le responde, pero Jacinto no la escucha, así que Jacinto le pregunta a una segunda nieta (Inés), ¿Qué dijo tu hermana? La segunda nieta le responde: dijo que tiene los ojos verdes. Ahora Jacinto hace su tercera y última pregunta, le pregunta a la tercera nieta (Pancha), ¿de qué color tienen los ojos tus hermanas María e Inés? Y ésta le responde: la primera negros y la segunda verdes.

Entonces Jacinto descubrió el color de ojos de cada una de las nietas del abuelo Anacleto y ganó el premio.

¿Podrías tú también hacerlo?, ¿cómo crees que el amigo del abuelo lo hizo?

Desafío 6. El abuelo Anacleto, matemático jubilado y aventurero una noche de lluvia le dice a sus nietos, les contaré la historia de como obtuve mi bicicleta, que ya cumplió 75 años, un buen día de Navidad mi padre, que sabia que yo añoraba tener una bicicleta, me dice. Anacletito te compraré la bicicleta que tanto te gusta, cuesta $256 (precio del año 1940), a partir del próximo mes de enero te daré mensualmente una parte de su valor, en enero te daré la mitad de su valor, en febrero la mitad de lo que resta, en marzo la mitad de lo que resta , en abril la mitad de lo que resta, y así sucesivamente, ahora mis queridos nietos. Si yo tenia para aportar a lo que mi padre me daba solo $1 ¿Cuanto tiempo después de la promesa yo pude comprarme la bicicleta?

Desafío 7. El abuelo Anacleto matemático jubilado y aventurero, un buen día le dice a sus nietos que puede adivinar el año y el mes de nacimiento de cualquier persona, los desafió a que traigan a sus amigos para demostrárselos. La nieta trajo una amiguita para hacer la prueba, el abuelo le dice piensa en el número del mes en que naciste, ahora multiplícalo por dos, a este resultado súmale 4, y este último resultado multiplícalo por 50, ahora súmale tu edad. Ahora dime niña, cual es el resultado, que número te dio. La niña le dice 513, entonces el abuelo le dice naciste en el mes de marzo de 2002 ¿Sabes cómo es que el abuelo lo hace?

Desafío 8. El abuelo Anacleto le contó a sus nietos Pedrito y Daniela, que su papá tenía un número de rut que era mágico, este número es el:

1,234,567 – 9.

Este número es mágico explicó el abuelo, porque si uno de ustedes piensa y me dice cualquier dígito yo puedo encontrar un número que multiplicado por el número mágico, da como resultado un número de nueve dígitos todos iguales al que ustedes digan.

Daniela le dijo, el 7 abuelo, entonces el abuelo multiplicó el número mágico por 63 y obtuvo el número 777.777.777. Pedrito le dijo el 4 abuelo, entonces el abuelo multiplicó el número mágico por 36 y obtuvo el número 444.444.444

¿Cómo crees tú que el abuelo lo logra?

Desafío 9. Una sabia hormiga (que no había estudiado mucha geometría) intentaba explicarle a una joven y aventurera hormiga exploradora la diferencia entre caminar y volar. Le decía: si tú y una de tus compañeras exploradoras caminan siempre en línea recta, es posible que los caminos que ambas recorran nunca se encuentren; en cambio, si dos aviones vuelan por el aire en línea recta siempre manteniendo la misma distancia a la tierra y van dejando una estela de humo a su paso, las dos estelas de humo en algún momento se cruzarán.

Desafío 10. El abuelo Anacleto matemático jubilado y aventurero, en la librería de los libros muertos encontró el número 142857, que es bastante curioso. Cuando llegó a Temuco le pidió a sus nietos que multiplicaran dicho número por 2, luego por 3, por 4, por 5 y por 6. Sus nietos se sorprendieron al ver que todos los resultados de estos productos fueron la misma serie de números en distinto orden, por ejemplo:

- $3 \cdot 142857 = 428571$
- $5 \cdot 142857 = 714285$

Luego el abuelo Anacleto multiplicó el número por 7 obteniendo 999999, que curioso ¿o no?, ¿podrías explicar por qué sucede esto?

Departamento de Matemática y Estadística
Universidad de La Frontera